

13. P. E. ARGAN (\*), N. D'ANGELO, A. GIGLI(\*). — Osservazioni sul funzionamento di una camera a diffusione.

**Riassunto.** — Si studiano teoricamente le caratteristiche di una camera a nebbia a sensibilità permanente, funzionante per diffusione di vapori di alcool metilico in aria a pressione normale e sotto forte gradiente di temperatura. Vengono calcolate le distribuzioni di temperatura, di tensione di vapore e di soprasaturazione in funzione del numero di ioni che si formano per  $\text{cm}^3 \cdot \text{sec.}$  nel volume racchiuso dalla camera. La altezza dello strato sensibile alle radiazioni ionizzanti risulta in buon accordo con le osservazioni sperimentali. Lo studio è stato esteso anche al caso in cui le varie grandezze che intervengono nel problema si ritengono funzioni oltre che della quota a partire dal fondo della camera anche di una coordinata orizzontale. Se ne ricavano informazioni circa la perturbazione introdotta nella forma dello strato sensibile da setti di materiale posti nell'interno della camera con distribuzione di temperatura assegnata; in particolare si deduce l'ordine di grandezza della distanza minima dai setti (o dalle pareti laterali) a cui sono ancora osservabili tracce di particelle ionizzanti.

**Résumé.** — On étudie théoriquement les caractéristiques d'une chambre à diffusion de vapeur d'alcool méthylique dans l'air à une pression normale et sous un fort gradient de température.

On calcule les distributions de la température, de la tension de vapeur et de la sursaturation en fonction du nombre d'ions qui se produisent par  $\text{cm}^3$  par sec. L'épaisseur de la couche sensible aux radiations ionisantes apparaît en accord avec les résultats expérimentaux. On a poussé cette étude jusqu'au cas où les diverses grandeurs intervenant dans les problèmes sont considérées comme fonctions non seulement de la hauteur à partir du fond, mais aussi d'une coordonnée horizontale. On obtient ainsi des informations concernant la perturbation introduite dans la forme de la couche sensible par des parois séparatrices de matériels différents, placées à l'intérieur de la chambre avec une distribution assignée de la température; on en déduit en particulier l'ordre de grandeur de la distance minima des parois latérales de la chambre, où il est encore possible d'observer des traces de particules ionisantes.

---

(\*) Attualmente Assistente all'Istituto di fisica dell'Università di Genova.

**Summary.** — A theoretical study was made of the characteristics of a permanently sensitive cloud chamber working by diffusion of methyl alcohol vapour in air at normal pressure and with a strong temperature gradient. The temperature, vapour pressure, and supersaturation distributions were calculated as functions of the number of ions formed per  $\text{cm}^3$  per sec. The calculated height of the sensitive layer agrees well with experimental observations. The case was also studied in which the quantities involved are considered as functions of a horizontal coordinate as well as of height from the floor of the chamber. Information was obtained in this way about the deformation of the sensitive layer caused by plates of different materials and with given temperature distributions placed in the chamber, and in particular the order of magnitude was deduced of the minimum distance from the plates (or from the side walls) at which the tracks of ionizing particles could still be observed.

**Zusammenfassung.** — Theoretisch untersucht werden die Eigenschaften einer ständig sensibelen Nebelkammer, die mit Diffusion von Methylalkoholdämpfen in Luft bei Normaldruck und bei starken Temperaturunterschieden arbeitet. Die Angleichung der Temperatur sowie der Ausgleich der Dampfspannung und Uebersättigung werden in Funktion der in dem von der Kammer umschlossenen Raum pro  $\text{cm}^3/\text{Sek.}$  berechnet. Die Höhe der für jonisierende Strahlung empfindlichen Schicht steht im Einvernehmen mit den bei den Versuchen gemachten Beobachtungen. Die Untersuchung wurde auch auf den Fall ausgedehnt, in dem die verschiedenen für das Problem in Frage kommenden Grössen nicht nur in Funktion der Höhe über dem Boden der Kammer, sondern auch in Funktion einer wagerechten Koordinate anzusehen sind. Hierdurch ist es möglich, Aufklärung über die Störungen zu erhalten, die in der Form der sensibelen Schicht durch im Inneren der Kammer eingesetzte Querwände mit Verteilung einer bestimmten Temperatur verursacht werden. Insbesondere kann hieraus der Mindestabstand von den Seitenwänden festgestellt werden, bei dem noch Spuren von jonisierenden Partikeln zu beobachten sind.

---

#### 1) INTRODUZIONE.

Lo studio delle camere a nebbia a sensibilità permanente è stato affrontato fin dal 1939 sia sperimentalmente che teoricamente con qualche successo <sup>(1)</sup>; esso è stato ripreso successivamente da diversi autori <sup>(2)</sup>, ma solo in questi ultimi anni si è pervenuti a risultati soddisfa-

centi <sup>(3)</sup>. Attualmente camere a diffusione funzionanti a pressione normale o a pressione elevata ( $20 \div 30$  Atm) sono impiegate con successo nello studio di problemi di varia natura <sup>(4)</sup>.

Il principio su cui si basa il funzionamento di questo strumento è ben noto; normalmente esso è costituito da un recipiente, ermeticamente chiuso e contenente un gas inerte, nella cui parte superiore è raccolto, in apposite bacinelle, un liquido organico (Alcool metilico, propilico, etilico) mantenuto ad una temperatura  $T_2$  ( $\simeq 293$  °K). Vapori del liquido organico diffondono nel gas, verso il basso, dalla zona a temperatura  $T_2$  ad una sottostante parete orizzontale mantenuta ad una temperatura  $T_1 < T_2$  ( $T_1 \simeq 213$  °K); un forte gradiente di temperatura è quindi stabilito tra la parte alta e la parte bassa del recipiente. In prossimità del fondo si producono permanentemente condizioni di soprasaturazione che, con una opportuna scelta della miscela gas-vapore e dei valori  $T_1$  e  $T_2$ , può essere tale da consentire la condensazione del vapore organico su centri elettricamente carichi; tracce di particelle ionizzanti sono allora visibili in uno strato sensibile orizzontale di altezza pari a qualche centimetro ( $4 \div 6$ ) a partire dal fondo della camera.

Lo studio teorico dello strumento è stato affrontato per la prima volta da LANGSDORF <sup>(1)</sup>. Il problema è stato affrontato da questo autore introducendo alcune ipotesi semplificative. Egli trascura l'effetto sulla distribuzione di temperatura e pressione parziale del vapore all'interno della camera, dovuto alla condensazione di vapore su centri di condensazione, sia elettricamente carichi che scarichi. Ciò che così si ottiene è solo una descrizione approssimata di quello che realmente accade, per il doppio effetto della condensazione: sottrazione di vapore e sviluppo di calore. Si ammette inoltre che le formule stabilite da KUUSINEN <sup>(5)</sup>, riguardanti il fenomeno della diffusione isoterma, possano ritenersi valide anche in presenza di un forte gradiente termico e che il vapore si comporti come un gas perfetto anche in condizioni di soprasaturazione. Infine si trascurano gli effetti dovuti alla presenza delle pareti del recipiente in cui avviene la diffusione; questa condizione comporta una trattazione unidimensionale del problema, nel senso che le varie grandezze che bisogna considerare vanno pensate dipendenti dalla sola quota.

Recentemente SHUTT <sup>(3)</sup> ha svolto una teoria unidimensionale in cui si tien conto della sottrazione di vapore per condensazione su centri elettricamente carichi e si suppone che lo sviluppo delle gocce sia determinato da equazioni di diffusione, per il vapore ed il calore, a simmetria sferica; si fa inoltre l'ipotesi che le gocce cadono conformemente alla legge di Stokes.

Più recentemente SUCCI e TAGLIAFERRI <sup>(3)</sup> hanno ripreso la teoria di LANGSDORF e valutato con un procedimento di approssimazioni successive qual'è l'andamento della soprasaturazione del vapore con la quota, quando non siano trascurabili gli effetti della condensazione su centri elettricamente carichi che penetrano nell'interno dello strato sensibile dalla zona immediatamente sovrastante.

In questi ultimi mesi noi abbiamo ripreso lo studio teorico dello strumento per cercare di rispondere in modo semplice ad alcuni quesiti non ancora affrontati da altri autori. La teoria è riportata nei paragrafi 2 e 3 di questo lavoro; dopo aver scritto alcune relazioni fondamentali (paragrafo 2.1) il problema viene affrontato pensando che le varie grandezze siano funzione della sola quota misurata a partire dal fondo della camera (trattazione unidimensionale). In un primo tempo (paragrafo 2.2) si considera il funzionamento di una camera senza tener conto del fenomeno della condensazione su centri elettricamente carichi, successivamente (paragrafo 2,3) si cerca di valutare l'altezza dello strato sensibile tenendo conto del fenomeno della condensazione. Nel paragrafo 3 si mostra come si può trattare il problema della determinazione della tensione di vapore e della distribuzione della temperatura anche nel caso in cui le due grandezze si ritengano funzione, oltre che della quota, anche di una coordinata orizzontale (trattazione bidimensionale). Così facendo è possibile rendere conto dell'influenza che una distribuzione di temperatura assegnata arbitrariamente sulle pareti della camera o su setti di materiale, posti nel suo interno, ha sulla conformazione dello strato sensibile.

## 2) RELAZIONI FONDAMENTALI E TRATTAZIONE UNIDIMENSIONALE DEL PROBLEMA.

2. 1) Nel seguito indicheremo con gli indici 1 e 2 le grandezze relative al vapore ed al gas rispettivamente; faremo inoltre uso delle seguenti notazioni:

|           |                                                                |
|-----------|----------------------------------------------------------------|
| c         | concentrazione (espressa in mole)                              |
| $\bar{v}$ | velocità media (o di insieme)                                  |
| p         | pressione parziale                                             |
| T         | temperatura                                                    |
| $\lambda$ | calore specifico a pressione costante                          |
| D         | coefficiente di diffusione                                     |
| K         | coefficiente di conducibilità termica della miscela gas-vapore |

Con  $\underline{I}_1 = c_1 \underline{v}_1$  e  $\underline{I}_2 = c_2 \underline{v}_2$  indicheremo i vettori di flusso del vapore e del gas rispettivamente e supporremo costanti le quantità  $\lambda$ ,  $K$  al variare della temperatura.

Per i vettori  $\underline{I}_1$  e  $\underline{I}_2$ , estendendo la prima legge di FICK <sup>(6)</sup> al caso in cui sia presente un gradiente di temperatura non nullo, scriviamo:

$$(1) \quad \underline{I}_i = \frac{c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2}{c_1 + c_2} c_i - \frac{D}{RT} \text{ grad } p_i \quad (i = 1, 2)$$

Il primo termine a secondo membro della (1) rappresenta ciò che di  $\underline{I}_i$  è dovuto alla convezione; il secondo il contributo della diffusione.

Quando non si tenga conto dei fenomeni di irraggiamento del calore non è difficile dedurre il seguente sistema di equazioni (Appendice 1, 1) <sup>(7)</sup>

$$\begin{aligned} a) \quad \text{div } \underline{I}_1 &= 0 \\ b) \quad \text{div } \underline{I}_2 &= 0 \\ c) \quad \text{div } \left\{ -K \text{ grad } T + T (\lambda_1 \underline{I}_1 + \lambda_2 \underline{I}_2) \right\} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad d) \quad \underline{I}_1 &= c_1 \underline{v}_1 = \frac{c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2}{c_1 + c_2} c_1 - \frac{D}{RT} \text{ grad } p_1 \\ e) \quad \underline{I}_2 &= c_2 \underline{v}_2 = \frac{c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2}{c_1 + c_2} c_2 - \frac{D}{RT} \text{ grad } p_2 \end{aligned}$$

con le ipotesi espresse dalle

$$(3) \quad \begin{cases} p_i = R c_i T & (i = 1, 2) \\ p_1 + p_2 = P = \text{cost.} \end{cases}$$

e relativamente a condizioni stazionarie.

Il coefficiente di diffusione  $D$  dipende dalla temperatura con un legame del tipo

$$(4) \quad D = D_1 \left( \frac{T}{T_1} \right)^n$$

dove con  $D_1$  si indica il coefficiente di diffusione del vapore organico in un gas alla pressione atmosferica ed alla temperatura  $T_1$ . Nel caso particolare, che sarà da noi discusso, di vapori di alcool metilico che diffondono in aria alla pressione atmosferica,  $D_1 = 0,0809$  unità C.G.S. ed  $n = 2$  <sup>(8)</sup>.

Le equazioni del sistema (2) tuttavia assumono una forma particolarmente semplice se si ammette che  $D$  non dipenda dalla temperatura; questo ci ha consentito, come vedremo in seguito, di trattare agevolmente il problema nel caso in cui le grandezze che bisogna considerare si immaginano dipendere anche da una coordinata orizzontale.

2. 2) Schematizziamo in un primo tempo la camera a diffusione come costituita da un sistema di due pareti orizzontali indefinite poste alla distanza  $h$  l'una dall'altra; la parete superiore sia alla temperatura  $T_2$  e la parete inferiore alla temperatura  $T_1 < T_2$ . In questa ipotesi le varie grandezze vanno pensate come dipendenti dalla sola quota  $y$ , misurata a partire dal fondo della camera. E' chiaro che in una trattazione unidimensionale del problema ed in condizioni stazionarie, ragioni di simmetria comportano che  $\underline{I}_1 = \underline{\Phi} = \text{cost}$  e che il gas debba essere pensato come macroscopicamente in quiete, cioè che  $\underline{I}_2 \equiv 0 \equiv \underline{v}_2$ .

La distribuzione della temperatura può essere determinata facendo uso delle equazioni a), b), c) del sistema (2). Con le ipotesi testè formulate le equazioni a) e b) sono automaticamente soddisfatte e la equazione c) può essere scritta nella forma seguente:

$$\frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{\lambda_1 \Phi}{K} \frac{dT}{dy} = 0$$

La soluzione di questa equazione è, tenuto conto che  $T(0) = T_1$  e  $T(h) = T_2$

$$(5) \quad T(y) = T_1 + \frac{1 - e^{-ay}}{1 - e^{-ah}} (T_2 - T_1)$$

$$\text{avendo posto: } a = \frac{\lambda_1 \Phi}{K}$$

Come vedremo nel seguito  $\Phi$  è di un ordine di grandezza tale per cui la funzione  $T(y)$  non si scosta fortemente dalla linearità.

Le equazioni d) ed e) del sistema (2) unitamente alle (3) ed assumendo per  $D$  il legame di dipendenza da  $T$  espresso dalla (4), consentono invece di dedurre la distribuzione della tensione di vapore  $p_1(y)$  (Appendice 1. 2);

$$(6) \quad p_1(y) = P \left\{ 1 - B^{\gamma/\Delta} (Ay + B)^{\gamma/\Delta} \right\}$$

avendo posto

$$(7) \quad \gamma = \frac{R \Phi T_1^2}{P D_1}$$

$$(8) \quad \begin{cases} A = \frac{T_2 - T_1}{h} \\ B = T_1 \end{cases}$$

La distribuzione della soprasaturazione  $S(y)$  risulta allora:

$$(9) \quad S(y) = \frac{p_1(y)}{p_{1s}(y)} = P \frac{1 - B^{\gamma/A} (Ay + B)^{\gamma/A}}{p_{1s}[T(y)]}$$

L'equazione (6) comprende, attraverso la costante  $\gamma$  il flusso  $\Phi$  del vapore; ora, nelle ordinarie condizioni di funzionamento, nel caso cioè in cui  $\Phi$  non viene imposto dall'esterno, come forse si potrebbe pensare di fare, è verosimile che si determini spontaneamente quel valore del flusso di vapore che corrisponde alla tensione di vapore saturo  $p_{1s}(h) = p_1(h)$  per  $y = h$ ; questo ci ha consentito di valutare il valore del coefficiente  $\gamma$  e di conseguenza la distribuzione della tensione di vapore  $p_1(y)$ . La distribuzione della soprasaturazione  $S(y)$  è stata calcolata introducendo nella (9) per la tensione di vapore saturo  $p_{1s}[T(y)]$  i valori soddisfacenti l'equazione di Clausius-Clapeyron.

Il calcolo è stato eseguito per una camera funzionante per diffusione di alcool metilico in aria a pressione normale, con la sorgente del vapore organico alla temperatura  $T_2 = 293^\circ\text{K}$ , con il fondo alla temperatura  $T_1 = 213^\circ\text{K}$  e con  $h = 20$  cm. I risultati sono riportati in fig. 1. Dalla intersezione della curva della soprasaturazione  $S_0(y)$  con la curva della soprasaturazione critica  $I$  risulta una altezza  $\xi_0$  dello strato sensibile pari a 17 cm. Va osservato che partendo dalle equazioni d) ed e) del sistema (2) ed immaginando costante il valore del coefficiente di diffusione  $D$  al variare della temperatura, si perviene ad una distribuzione della soprasaturazione  $S(y)$  che, per valori sufficientemente piccoli di  $y$ , si discosta sensibilmente da quella rappresentata dalla (9), mentre per valori di  $y$  sufficientemente grandi tale differenza tende rapidamente ad annullarsi. Per quel che riguarda l'altezza dello strato sensibile  $\xi_0$  ciò si traduce in uno scarto dell'ordine di qualche millimetro.

La impostazione del calcolo ed i risultati a cui siamo pervenuti in

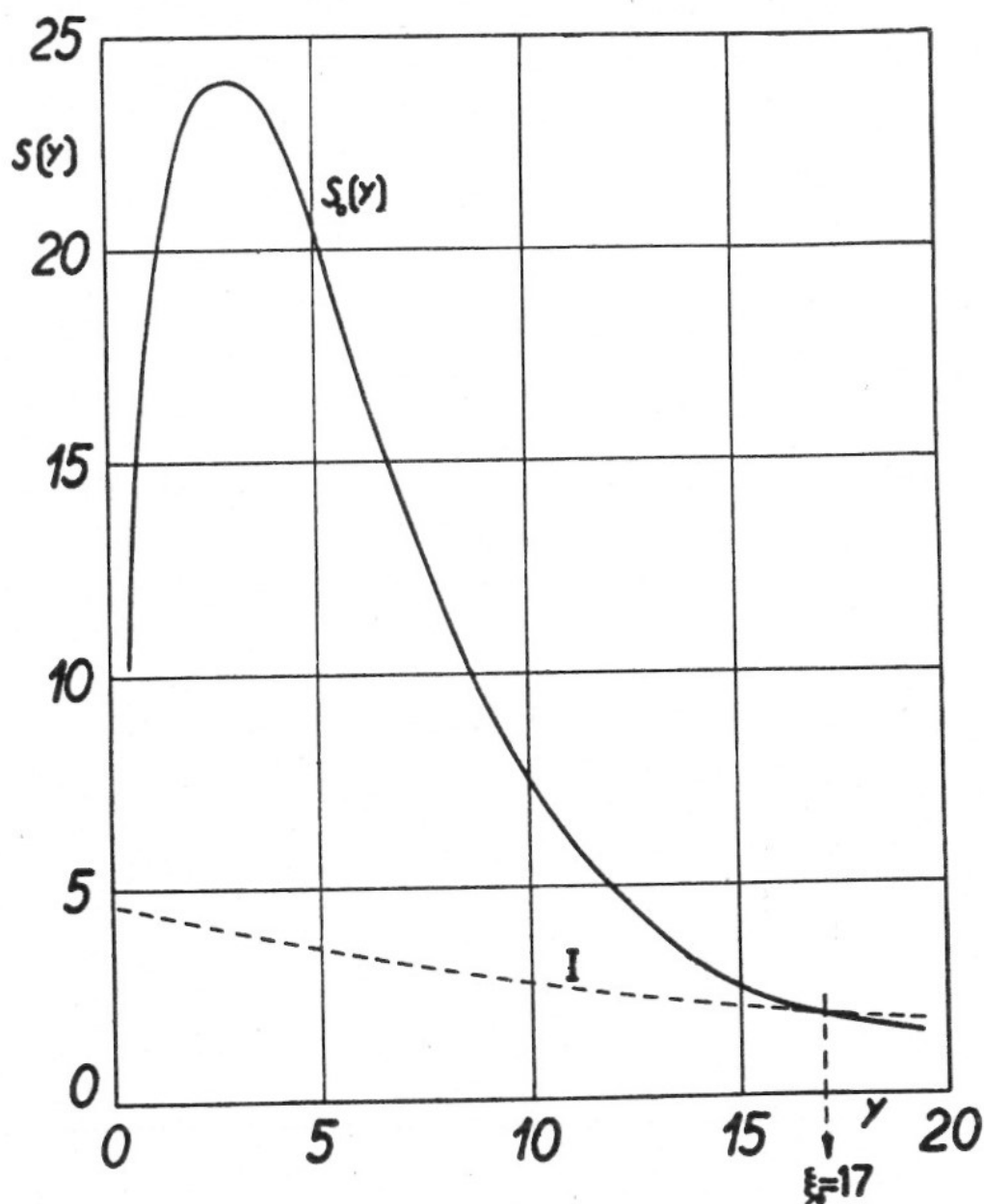


Fig. 1. - La curva  $S_0(y)$  rappresenta la distribuzione della soprasaturazione (trattazione unidimensionale) in funzione della quota, quando non si tiene conto della condensazione del vapore su centri carichi [formula (9)]. La curva  $I$  rappresenta la distribuzione della soprasaturazione critica.

questo paragrafo non differiscono sensibilmente da quanto stabilito precedentemente da LANGSDORF <sup>(1)</sup>. A noi è sembrato particolarmente vantaggioso utilizzare le ipotesi di partenza di LANGSDORF e scrivere un sistema di equazioni (2) che ci rappresentasse, sia pure con le approssimazioni talora grossolane introdotte, nella maniera più generale possibile, il problema fisico proposto. Tale rappresentazione risulterà, come vedremo fra poco, particolarmente vantaggiosa nel tentativo che faremo di tener conto della condensazione del vapore su centri carichi (paragrafo 2.3) e nella trattazione bidimensionale del problema (paragrafo 3).

2.3) — A partire da ciò che è stato stabilito con la teoria svolta senza tener conto della condensazione del vapore su centri carichi è possibile tentare di prevedere come si modifichi la distribuzione della soprasaturazione quando nell'interno della camera si abbia formazione di coppie di ioni dovute alla radiazione cosmica, alla infezione radioattiva o ad una qualsiasi altra causa esterna; conseguentemente è possibile valutare l'altezza dello strato sensibile in funzione del numero di ioni che si formano per  $\text{cm}^3 \text{ sec}$ .

Le equazioni d) ed e) del sistema (2), con le ipotesi da noi formulate [Appendice 1,2: formule (A1, 11) e (A1, 12)] ci consentono di scrivere per il vettore di flusso  $\underline{I}_1$  la relazione seguente:

$$(10) \quad \underline{I}_1 = - \frac{P}{P - p_1} \frac{D}{RT} \text{ grad } p_1$$

Per tener conto della sottrazione di vapore per condensazione noi penseremo di sostituire al vettore  $\underline{I}$  il vettore

$$(11) \quad \underline{I}^* = (\varepsilon + \varepsilon'y) \underline{I}$$

che rappresenta il nuovo vettore di flusso in funzione della quota, limitatamente ai valori di  $y$  compresi tra 0 e  $\xi$ , avendo indicato con  $\xi$  l'altezza dello strato sensibile.

Analogamente penseremo di rappresentare la nuova distribuzione della temperatura con una relazione del tipo

$$(12) \quad T^* = (\eta + \eta'y) T$$

Per quanto riguarda le costanti  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\eta$  ed  $\eta'$  assumiamo quanto segue:

a) la temperatura  $T^*$  si deve ridurre alla temperatura  $T_1$  sul fondo della camera ( $y = 0$ ); ciò comporta che sia

$$(13) \quad \eta = 1$$

b) per il flusso di vapore deve essere soddisfatta la condizione di continuità sulla sommità dello strato sensibile ( $y = \xi$ ); ciò comporta che sia

$$(14) \quad \varepsilon + \varepsilon'\xi = 1$$

c) per la tensione di vapore deve essere soddisfatta la condizione di continuità sulla sommità dello strato sensibile; tale condizione comporta un legame tra  $\epsilon'$  e  $\eta'$

d) dalla posizione (11) risulta chiaro che

$$(15) \quad (\underline{I} - \underline{I}^*)_{y=0} = \underline{I} (1 - \epsilon)$$

il termine  $1 - \epsilon$  rappresenta quindi la riduzione relativa del flusso di vapore sul fondo della camera, e, conseguentemente,  $\epsilon$  dipende dal numero di ioni che si formano per  $\text{cm}^3$  per sec.

Nella Appendice 2 è riportato con qualche dettaglio lo sviluppo del calcolo che, con la imposizione delle condizioni discusse in a), b), c) e d), porta facilmente a scrivere le seguenti relazioni:

$$(16) \quad \epsilon' \left( \frac{B}{A} \xi - 1 \right) + \eta' (1 - \epsilon' \xi) = 0$$

e

$$(17) \quad \ln \frac{P - p_1^*}{P - p_{1s}} = - \beta B y \left[ (1 - \epsilon' \xi) + y \left( \epsilon' - \frac{1}{2} \frac{A}{B} \right) \right]$$

La (16) lega fra loro  $\epsilon'$ ,  $\eta'$  e  $\xi$ , mentre la (17) costituisce un legame tra la nuova tensione di vapore  $p_1^*$  ( $y$ ), il flusso di vapore  $\Phi$ , la quota  $y$ , l'altezza dello strato sensibile  $\xi$  ed il parametro  $\epsilon'$  che, per la (14), dipende dal numero di ioni che si formano per  $\text{cm}^3 \cdot \text{sec}$  nell'interno della camera.

Il nostro problema è così ricondotto alla ricerca di una relazione tra il valore di  $\epsilon$ , che traduce il caso fisico che si considera, e l'altezza del corrispondente strato sensibile  $\xi$ . Dalle equazioni (12), (14), (16), (17), dall'equazione di Clausius-Clapeyron e dalla relazione di Thompson si potrebbe pensare di giungere direttamente al legame analitico tra  $\epsilon$  e  $\xi$ . Tale procedimento non è possibile in forma esplicita; per questo motivo abbiamo fatto ricorso ad un metodo di approssimazioni successive che permette di determinare coppie di valori  $\epsilon$  e  $\xi$ , soluzioni del nostro problema.

Le distribuzioni di temperatura e di tensione di vapore, calcolate mediante le relazioni (3) e (6) del paragrafo precedente, ci hanno consentito di disegnare la curva della soprasaturazione  $S_0(y)$  rappresentata in fig. 1 e conseguentemente di ricavare il valore  $\xi_0$  dell'altezza dello strato sensibile quando si trascuri l'effetto della condensazione.

Una volta fissato opportunamente il valore di  $\epsilon = \epsilon_0$ , la relazione (14), per  $\xi = \xi'_0 = 17$  ci fornisce il corrispondente valore di  $\epsilon' = \epsilon'_0$ ; dalla (16) posto  $\xi = \xi_0$  e  $\epsilon' = \epsilon'_0$  si ricava invece quel valore di  $\eta'$  che introdotto nella (12) ci consente, in virtù della (13), di calcolare la nuova distribuzione della temperatura  $T^*(y)$ . Con le stesse posizioni la (17) rende possibile la determinazione della distribuzione della tensione di vapore  $p_{11}^*(y)$ . Così operando è possibile dedurre una nuova distribuzione della soprasaturazione  $S_1(y)$  e conseguentemente un nuovo valore dell'altezza dello strato sensibile  $\xi_1$ .

Tale procedimento può essere riapplicato facilmente partendo dal nuovo valore dell'altezza dello strato  $\xi_1$ , quando si assuma la relazione:

$$(18) \quad \frac{1 - \epsilon_0}{1 - \epsilon_1} = \frac{\xi_0}{\xi_1}$$

Essa consente infatti di calcolare il nuovo valore di  $\epsilon = \epsilon_1$  che, unitamente a  $\xi_1$ , costituisce il dato di partenza per la successiva applicazione del metodo descritto.

Questo procedimento di approssimazione converge con estrema rapidità, in modo che sono sufficienti poche sue applicazioni successive per determinare l'altezza  $\xi_1$  dello strato sensibile con l'approssimazione di  $2 \div 3$  mm.

Facciamo osservare che il valore di  $\epsilon'$ , in base alla (18), rimane invariante da una tappa all'altra del procedimento di approssimazione; ciò significa che per ogni valore di  $\xi = \xi_i$ , risulta automaticamente soddisfatta la condizione di continuità del flusso di vapore e che quindi è possibile trovare immediatamente la coppia di valori  $\epsilon$  e  $\xi$  che soddisfa alla condizione che  $\epsilon'$  abbia un valore predeterminato.

In fig. 2 sono rappresentate le distribuzioni finali della soprasaturazione  $S(y)$  ottenute applicando il metodo di approssimazione descritto, nei casi in cui si assumano per  $\epsilon_0$  i valori 0,6, 0,7 e 0,8; dalla intersezione delle  $S(y)$  con le curve della soprasaturazione critica  $I$  corrispon-

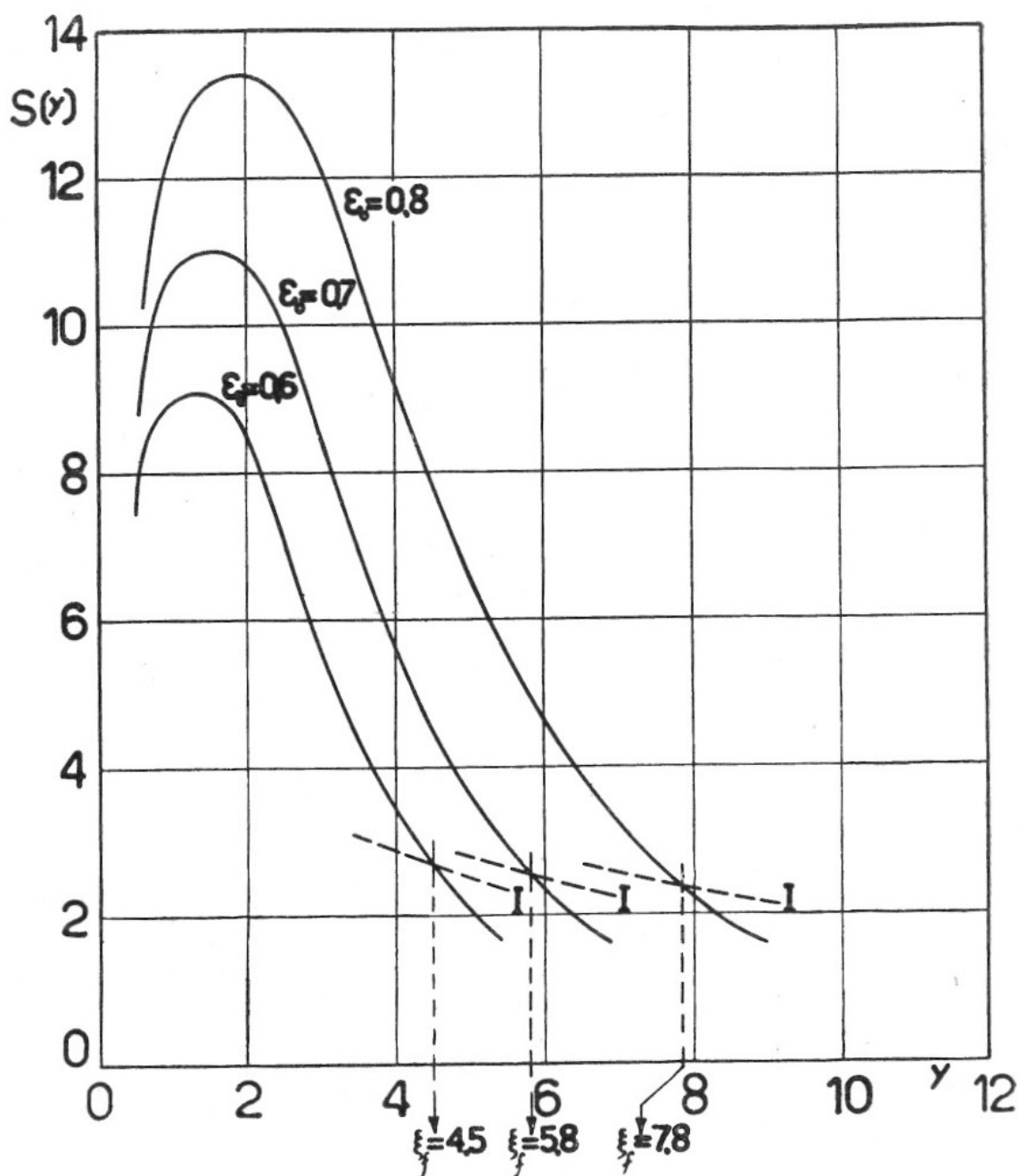


Fig. 2. - Le tre curve disegnate rappresentano le distribuzioni della soprasaturazione (trattazione unidimensionale) in funzione della quota quando si tiene conto della condensazione del vapore su centri carichi e per i valori indicati del parametro  $\epsilon_0$ . Le curve I rappresentano le distribuzioni della soprasaturazione critica per i tre casi considerati.

denti alle diverse distribuzioni di temperatura che caratterizzano i tre casi considerati, si deduce un valore dell'altezza dello strato sensibile  $\xi_1$  pari a 4,5, 5,8 e 7,8 cm rispettivamente.

In fig. 3 è rappresentato l'andamento dell'altezza dello strato  $\xi'$  in funzione di  $\epsilon_0$ ; in fig. 4 l'andamento del valore finale di  $\epsilon$  in funzione di  $\epsilon_0$ . Si può notare come al variare di  $\epsilon_0$  il valore di  $\epsilon$  si mantiene

sempre tra 1 e  $\sim 0,85$ ; in particolare, per  $0,6 \leq \varepsilon_0 \leq 0,8$  è  $0,89 \leq \varepsilon_f \leq 0,91$  in modo che, in questo intervallo di variabilità per  $\varepsilon_0$  si può ritenere costante  $\varepsilon_f$ . Questa approssimazione che è valida anche per va-

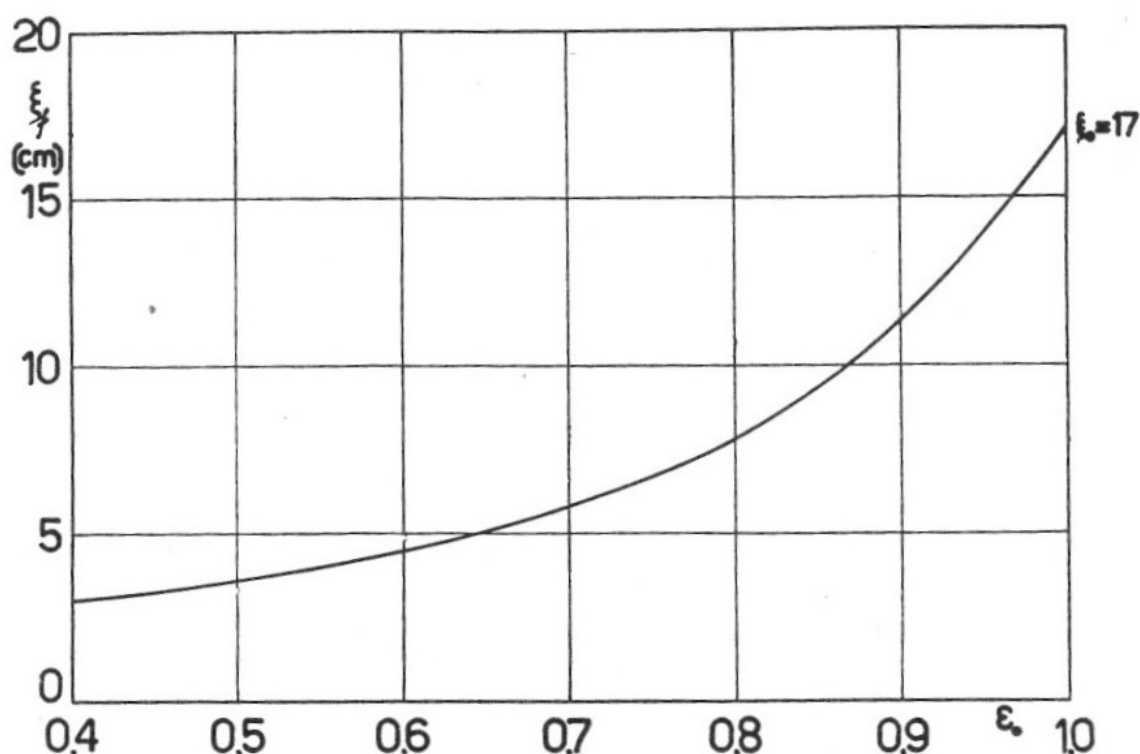


Fig. 3. - Andamento dell'altezza dello strato sensibile  $\xi_f$  in funzione del parametro  $\varepsilon_0$ .

lori di  $\varepsilon_0 < 0,6$ , come risulta chiaro dallo stesso grafico, consente di stabilire la relazione diretta tra  $\varepsilon_0$  e  $\xi_f$

$$(19) \quad \xi_f = \xi_0 \frac{1 - \varepsilon_f}{1 - \varepsilon_0}$$

Essa fornisce, almeno in prima approssimazione, un comodo prolungamento analitico fino a valori di  $\varepsilon_0 < 0,5$  della curva degli  $\xi_f$  del grafico riportato in fig. 3.

L'ordine di grandezza dei valori di  $\varepsilon_0$  utilizzati per calcolare le distribuzioni della soprasaturazione rappresentate in fig. 2 è stato stabilito con semplici considerazioni fisiche che collegano tale parametro con la riduzione relativa del flusso di vapore sul fondo della camera per effetto della condensazione.

Si consideri la relazione (15); essa può essere scritta nella forma

$$(20) \quad \Delta \Phi_{(y=0)} = \Phi (1 - \varepsilon_f)$$

La relazione (7), una volta stabilito il valore di  $\gamma$  con i criteri già discussi nel paragrafo 2.2, ci consente di ricavare il valore numerico del flusso  $\Phi$  del vapore: assumendo per  $y = h$   $p_1(h) = p_{1s}(h) = 100$  mm Hg, la (6) porge  $\gamma = 1.74$  e conseguentemente la (7)

$$\Phi = 3,70 \cdot 10^{-8} \text{ mole/cm}^2.\text{sec}$$

Si può ritenere che la quantità di liquido organico che si deposita sotto forma di gocce per  $\text{cm}^2.\text{sec}$  sul fondo della camera sia proporzionale al

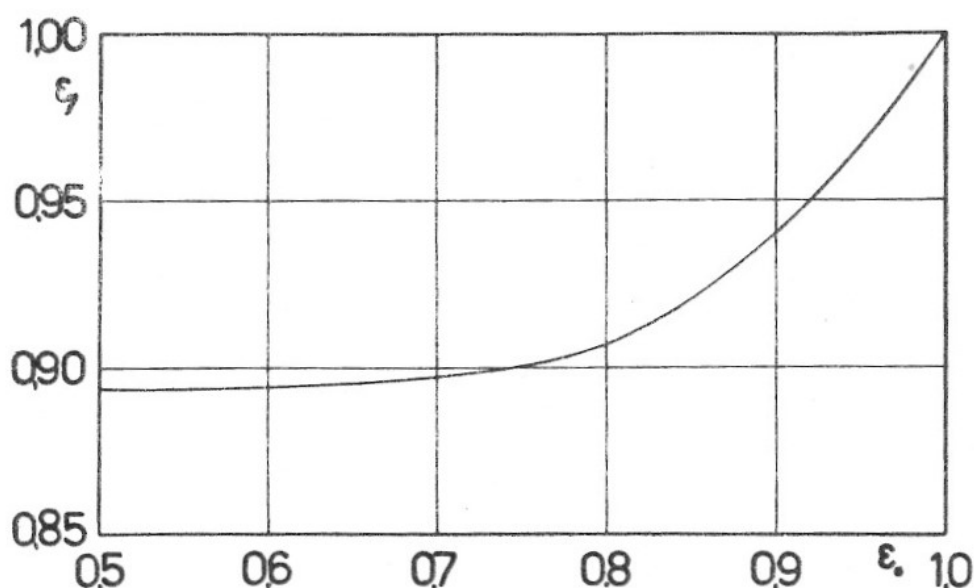


Fig. 4. - Andamento del parametro  $\epsilon_f$  in funzione del parametro  $\epsilon_0$ .

numero  $n$  di ioni che si formano per  $\text{cm}^3.\text{sec}$  e all'altezza dello strato sensibile  $\xi_f$ ; ne segue ovviamente la relazione

$$(21a) \quad \Delta \Phi_{(y=0)} = n \xi_f \frac{4}{3} \pi \bar{r}^3 \frac{\delta}{M} = \Phi (1 - \epsilon_f)$$

avendo indicato con  $\bar{r}$  il raggio medio delle gocce di alcool metilico all'istante della loro caduta sul fondo della camera, con  $\delta$  e  $M$  la densità ed il peso molecolare dell'alcool metilico.

Circa il valore del raggio medio delle gocce, che interviene nella (21a), vogliamo far notare che esso è a sua volta funzione dell'altezza dello strato sensibile; ciò deriva dal fatto che vale per ogni goccia, all'istante di arrivo sul fondo della camera, la relazione

$$(21b) \quad r^2 = \frac{K}{v} y_s$$

in cui  $y_s$  è la quota di generazione della goccia,  $K$  è una grandezza praticamente costante <sup>(9)</sup> e  $v$  è la velocità di caduta delle gocce, anch'essa costante.

Integrando il valore di  $r$  fornito dalla (21b) tra 0 e  $\xi$  e dividendo per  $\xi$  medesimo, risulta che  $r$  è proporzionale a  $\xi^{1/2}$ . Si ricava così dalla (21a) che  $\Delta\Phi_{(y=0)}$  è proporzionale, tramite il fattore  $\bar{r}^3$ , a  $\xi^{3/2}$ ; in definitiva tale riduzione di flusso risulta proporzionale a  $\xi^{3/2}$ .

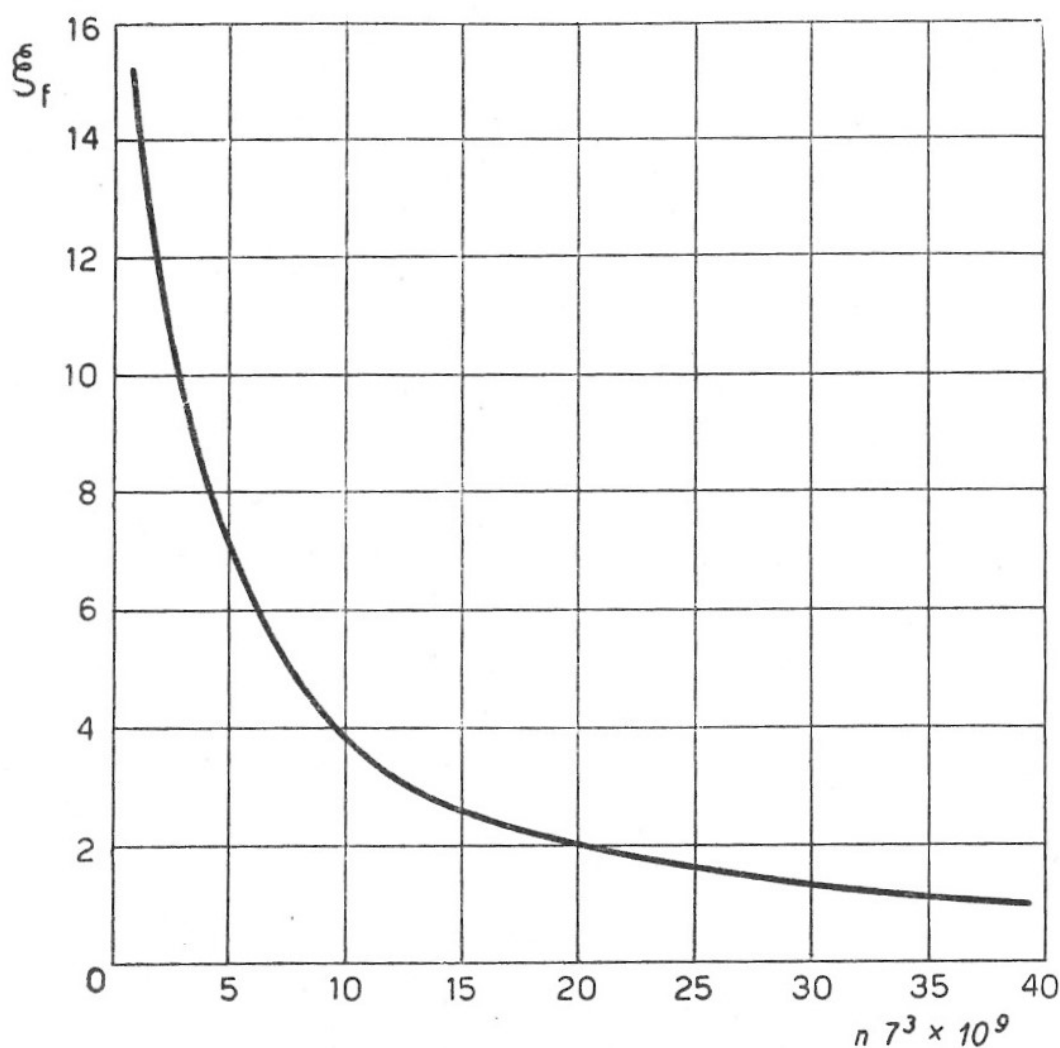


Fig. 5. - Andamento dell'altezza dello strato sensibile  $\xi_f$  in funzione di  $n\bar{r}^3$ .

Introducendo nella (21a) i valori numerici delle varie grandezze ( $\delta = 0,79$  gr/cm<sup>3</sup> e  $M = 32,04$ ) ed utilizzando i grafici di fig. 3 e fig. 4 è possibile rappresentare l'andamento dell'altezza dello strato sensibile in funzione di  $n\bar{r}^3$ . Tale andamento è rappresentato in fig. 5; da esso si

deduce facilmente che, se il numero  $n$  di ioni (\*) è compreso tra 1 e 10 e se si assume per  $\bar{r}$  un valore di  $1 \div 2 \times 10^{-3}$  cm <sup>(10)</sup> e quindi un valore di  $\epsilon_0$  compreso tra 0,8 e 0,6, l'altezza dello strato sensibile risulta conseguentemente di  $8 \div 4$  cm. Questo risultato è consistente con le osservazioni sperimentali <sup>(11)</sup>.

### 3) TRATTAZIONE BIDIMENSIONALE DEL PROBLEMA.

3.1) — Ci proponiamo ora di far vedere come partendo dal sistema di equazioni (2) e (3) del paragrafo 2.2 sia possibile determinare la distribuzione della temperatura e della tensione di vapore quando tali grandezze si pensino funzione oltre che della quota anche di una coordinata orizzontale. Il problema proposto in questi termini è in sostanza quello della determinazione della conformazione dello strato sensibile di una camera a diffusione indefinita in un solo senso, la cui sezione con il piano  $x, y$  è quella rappresentata in fig. 6. I lati AC e BD del rettangolo possono essere intesi sia come pareti laterali della camera, sia come setti di materiale qualunque, sui quali sia imposta una certa distribuzione di temperatura; i lati AB e CD rappresentano invece le pareti inferiore e superiore della camera, mantenute alla temperatura  $T_1$  e  $T_2$  rispettivamente.

Anche in questo caso noi supporremo, in un primo tempo, di trascurare l'effetto della condensazione del vapore su centri carichi; in un secondo tempo, riconosciuta la impossibilità di applicare direttamente il procedimento descritto al paragrafo 2.3, mostreremo che è tuttavia possibile ottenere informazioni sulla depressione dello strato sensibile in funzione del numero di ioni per  $\text{cm}^3\text{sec}$ , limitatamente al centro della camera.

L'insieme delle equazioni (2) e (3) costituisce un sistema di 12 equazioni indipendenti in 13 incognite. Abbiamo già visto che esso è sufficiente a descrivere il comportamento dell'insieme vapore-gas in una trattazione unidimensionale del problema; l'eliminazione di  $\underline{I}_2$  e  $\underline{v}_2$  dal numero delle incognite ha portato a considerare un sistema di 7 equazioni indipendenti in 7 incognite, che è stato risolto.

Nella trattazione bidimensionale, per evitare complicazioni eccessive,

---

(\*) Facciamo osservare che i valori di  $n$  da noi assunti sono compresi nell'intervallo normalmente accettato per aria alla pressione di una atmosfera ed al livello del mare.

introdurremo l'ipotesi semplificativa che  $\underline{I}_2 \equiv 0 \equiv \underline{v}_2$ . Va osservato che tale ipotesi non è in generale verificata; essa significa, infatti, assumere che il gas sia macroscopicamente in quiete, ma è chiaro che per alcuni tipi di condizioni per la tensione di vapore  $p_1$  e per la temperatura  $T$ ,

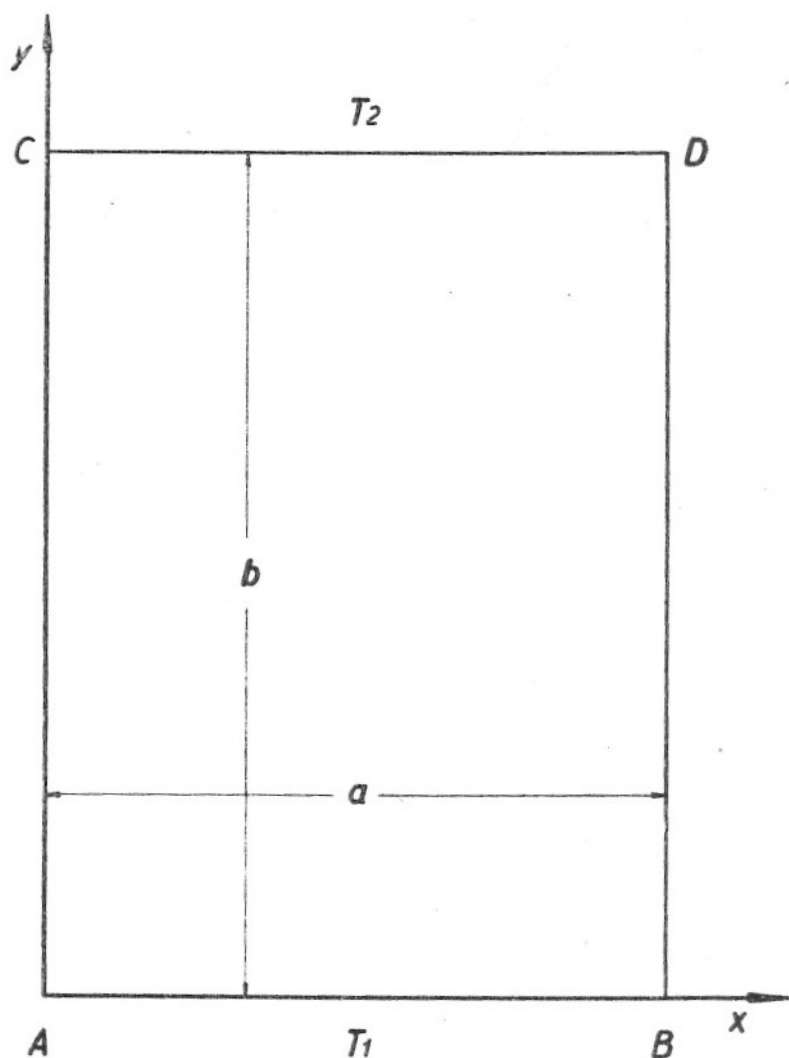


Fig. 6. - Il rettangolo ABCD rappresenta il dominio  $d$  assunto per la integrazione del sistema di equazioni (24).

che bisogna pensare di imporre sul bordo del rettangolo ABCD, non è possibile evitare la presenza di moti del gas. Tuttavia, limitatamente ad alcuni tipi di condizioni sul bordo, quali quelli che in seguito assumeremo, si può ritenere, anche in base ad osservazioni sperimentali, che l'approssimazione introdotta sia ragionevole.

Il sistema si riduce allora ad 8 equazioni indipendenti in altrettante incognite.

Per le (2) e le (3) si ottiene immediatamente:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_1 = - \frac{P}{P - p_1} \frac{D}{RT} \text{ grad } p_1 \\ \text{div } \underline{I}_1 = 0 \\ \text{div } \left\{ -K \text{ grad } T + \lambda_1 T \underline{I}_1 \right\} = 0 \end{array} \right.$$

che, posto

$$(23) \quad \alpha = \frac{\lambda_1 PD}{KR} = \text{cost.}, \quad p = P - p_1 \quad \text{e} \quad u = \ln p$$

si riduce al seguente sistema differenziale:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} T \Delta_2 U - \text{grad } T \times \text{grad } u = 0 \\ \Delta_2 T - \alpha \Delta_2 u = 0 \end{array} \right.$$

La distribuzione della tensione di vapore  $p_1$  e della temperatura  $T$  sono determinate come soluzioni di questo sistema differenziale nel dominio rettangolare di fig. 6 quando siano assegnate le condizioni sui bordi del rettangolo ABCD.

L'integrazione del sistema (24) è stata recentemente effettuata presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo del C.N.R. <sup>(12)</sup> con le seguenti condizioni al contorno:  
per la funzione  $T(x, y)$

$$(25a) \quad \left\{ \begin{array}{l} T(x, 0) = 213 \text{ } ^\circ\text{K} \\ T(0, y) = T(a, y) = \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} T(x, b) = 293 \text{ } ^\circ\text{K} & \\ 213 + 8y & \text{per } 0 \leq y \leq b/2 \\ 293 & \text{per } b/2 \leq y \leq b \end{array} \right.$$

per la pressione parziale del vapore i valori sul contorno sono assegnati mediante la seguente corrispondenza:

|       | $T \text{ (} ^\circ\text{K)}$ | $p_1 \text{ (dine/cm}^2\text{)}$ |
|-------|-------------------------------|----------------------------------|
|       | 229                           | $0,133 \cdot 10^4$               |
|       | 257                           | $1,330 \cdot 10^4$               |
| (25b) | 278                           | $5,320 \cdot 10^4$               |
|       | 294                           | $13,300 \cdot 10^4$              |
|       | 323                           | $53,200 \cdot 10^4$              |
|       | 338                           | $101,000 \cdot 10^4$             |

i valori di  $p_1$  soddisfacendo all'equazione di Clausius-Clapeyron per le temperature date.

In questo modo si rappresenta, ad esempio, la situazione di una

TABELLA N. 1.

Valori numerici della funzione  $T(x, y)$ , soluzione del sistema differenziale (24) con le condizioni al contorno (25) e (26)

| $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ | 0   | 1,25   | 2,5    | 5      | 7,5    |
|--------------------------------------|-----|--------|--------|--------|--------|
| 1                                    | 2   | 3      | 4      | 5      | 6      |
| 0                                    | 213 | 213,00 | 213,00 | 213,00 | 213,00 |
| 1,25                                 | 223 | 222,68 | 222,38 | 221,92 | 221,74 |
| 2,5                                  | 233 | 232,32 | 231,67 | 230,68 | 230,32 |
| 5                                    | 253 | 251,30 | 249,71 | 247,39 | 246,58 |
| 7,5                                  | 273 | 269,40 | 266,25 | 262,17 | 260,86 |
| 10                                   | 293 | 283,92 | 279,10 | 273,85 | 272,30 |
| 12,5                                 | 293 | 289,24 | 286,02 | 281,88 | 280,57 |
| 15                                   | 293 | 291,13 | 289,43 | 286,99 | 286,15 |
| 17,5                                 | 293 | 292,20 | 291,47 | 290,38 | 289,99 |
| 18,75                                | 293 | 292,62 | 292,26 | 291,73 | 291,35 |
| 20                                   | 293 | 293,00 | 293,00 | 293,00 | 293,00 |

TABELLA N. 2.

Valori numerici (\*) della funzione  $p_1(x, y)$ , soluzione del sistema differenziale (24) con le condizioni al contorno (25) e (26)

| $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ | 0      | 1,25   | 2,5    | 5      | 7,5    |
|--------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1                                    | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      |
| 0                                    | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 |
| 1,25                                 | 0,0028 | 0,0306 | 0,0492 | 0,0700 | 0,0746 |
| 1,5                                  | 0,0121 | 0,0677 | 0,1046 | 0,1437 | 0,1551 |
| 5                                    | 0,0931 | 0,1985 | 0,2622 | 0,3232 | 0,3366 |
| 7,5                                  | 0,3882 | 0,4905 | 0,5303 | 0,5479 | 0,5479 |
| 10                                   | 1,2692 | 0,9631 | 0,8658 | 0,7868 | 0,7674 |
| 12,5                                 | 1,2692 | 1,1628 | 1,0981 | 0,9799 | 0,9547 |
| 15                                   | 1,2692 | 1,2223 | 1,1742 | 1,1133 | 1,0926 |
| 17,5                                 | 1,2692 | 1,2509 | 1,2305 | 1,2018 | 1,1936 |
| 18,75                                | 1,2692 | 1,2631 | 1,2529 | 1,2386 | 1,2346 |
| 20                                   | 1,2692 | 1,2733 | 1,2733 | 1,2733 | 1,2733 |

(\*) I valori numerici di questa tabella vanno moltiplicati per  $10^5$ .

camera le cui pareti laterali sono ricoperte di velluto imbevuto di alcool.

Attualmente è in corso l'integrazione del sistema differenziale (24) con condizioni al contorno diverse e corrispondenti a condizioni fisiche facilmente realizzabili sperimentalmente (Appendice 3).

L'integrazione del sistema (24), con le condizioni al contorno discusse, ha fornito per la  $T(x, y)$  e la  $p_1(x, y)$  i valori riportati nelle Tabelle I e II.

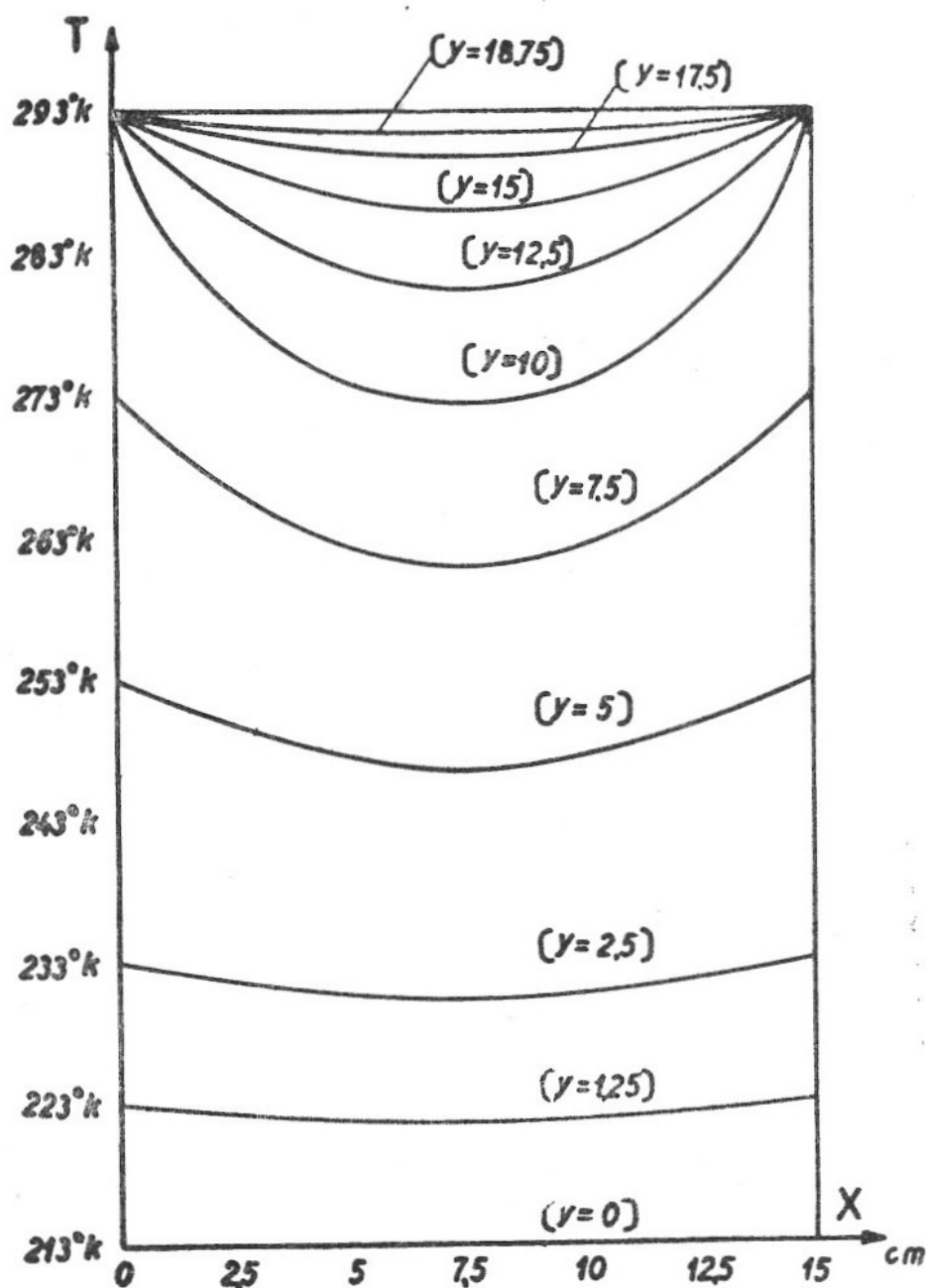


Fig. 7. - Distribuzione della temperatura, su piani orizzontali a quote diverse, derivante dalla integrazione del sistema di equazioni (24) con le condizioni al contorno discusse nel testo.

Le curve riportate in fig. 7 rappresentano la distribuzione di temperatura su piani orizzontali a diverse quote; le curve riportate in fig. 8 rappresentano l'andamento della soprasaturazione  $S(x, y)$  per gli stessi piani orizzontali. Dalla intersezione delle curve di soprasaturazione (li-

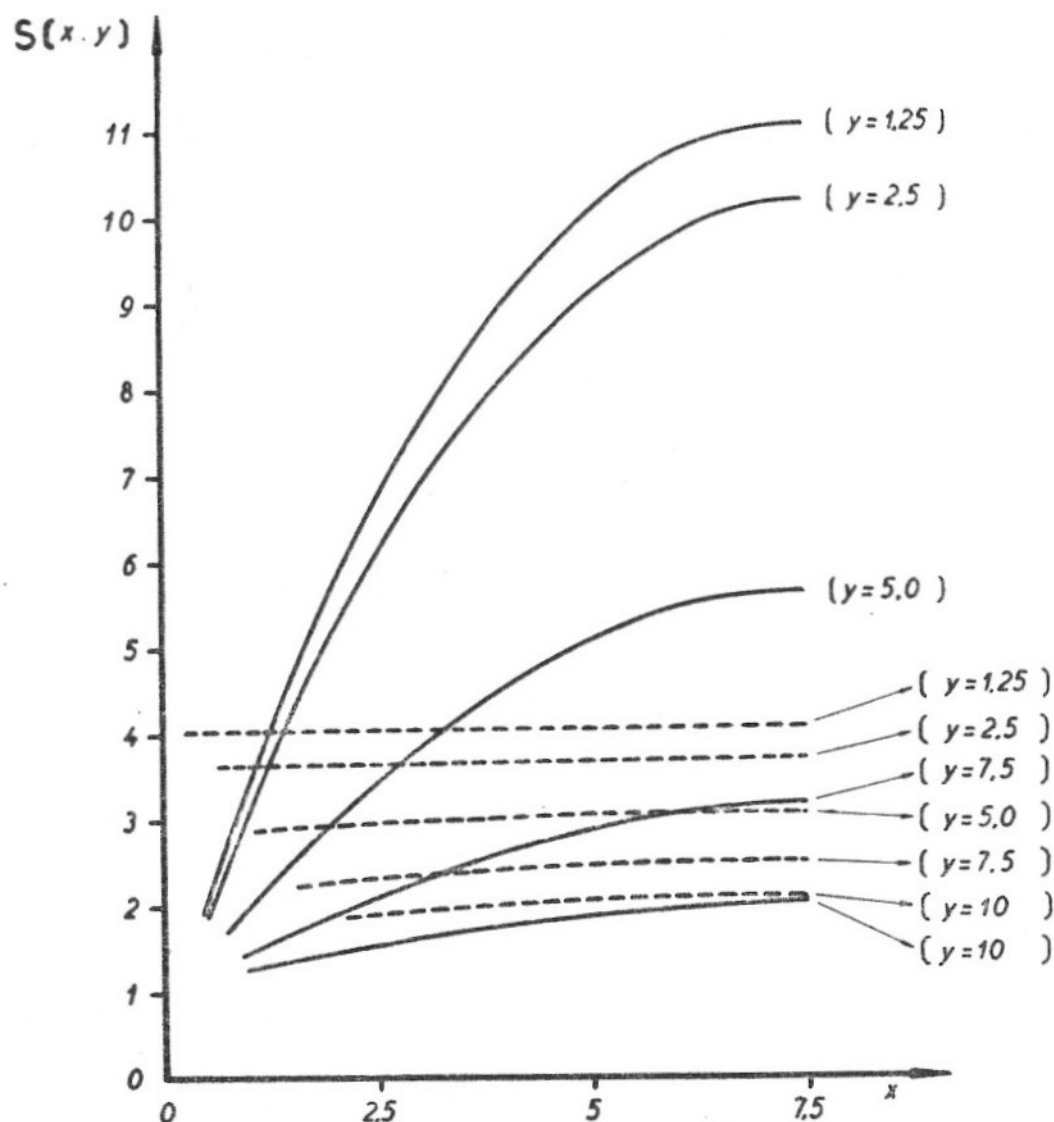


Fig. 8. - Distribuzione della soprasaturazione, su piani orizzontali a quote diverse, derivante dalla integrazione del sistema di equazioni (24) con le condizioni al contorno discusse nel testo. Le curve tratteggiate rappresentano le distribuzioni della soprasaturazione critica su piani di quota corrispondente.

nea piena) con le curve di soprasaturazione critica (linea tratteggiata) relative ai piani di uguale quota, è possibile dedurre punto per punto la conformazione della sommità dello strato sensibile; essa è rappresentata dalla curva  $\sigma$  di fig. 9. Lo strato sensibile presenta un massimo  $\xi_{ob} = 9,4$  cm e la sua conformazione è simmetrica rispetto ad un piano

verticale equidistante da AC e BD. E' evidente la presenza di una zona di insensibilità in vicinanza delle pareti; essa è giusto dell'ordine di grandezza di quella da noi osservata con una disposizione sperimentale molto vicina a quella rappresentata dalle condizioni (25a) e (25b).

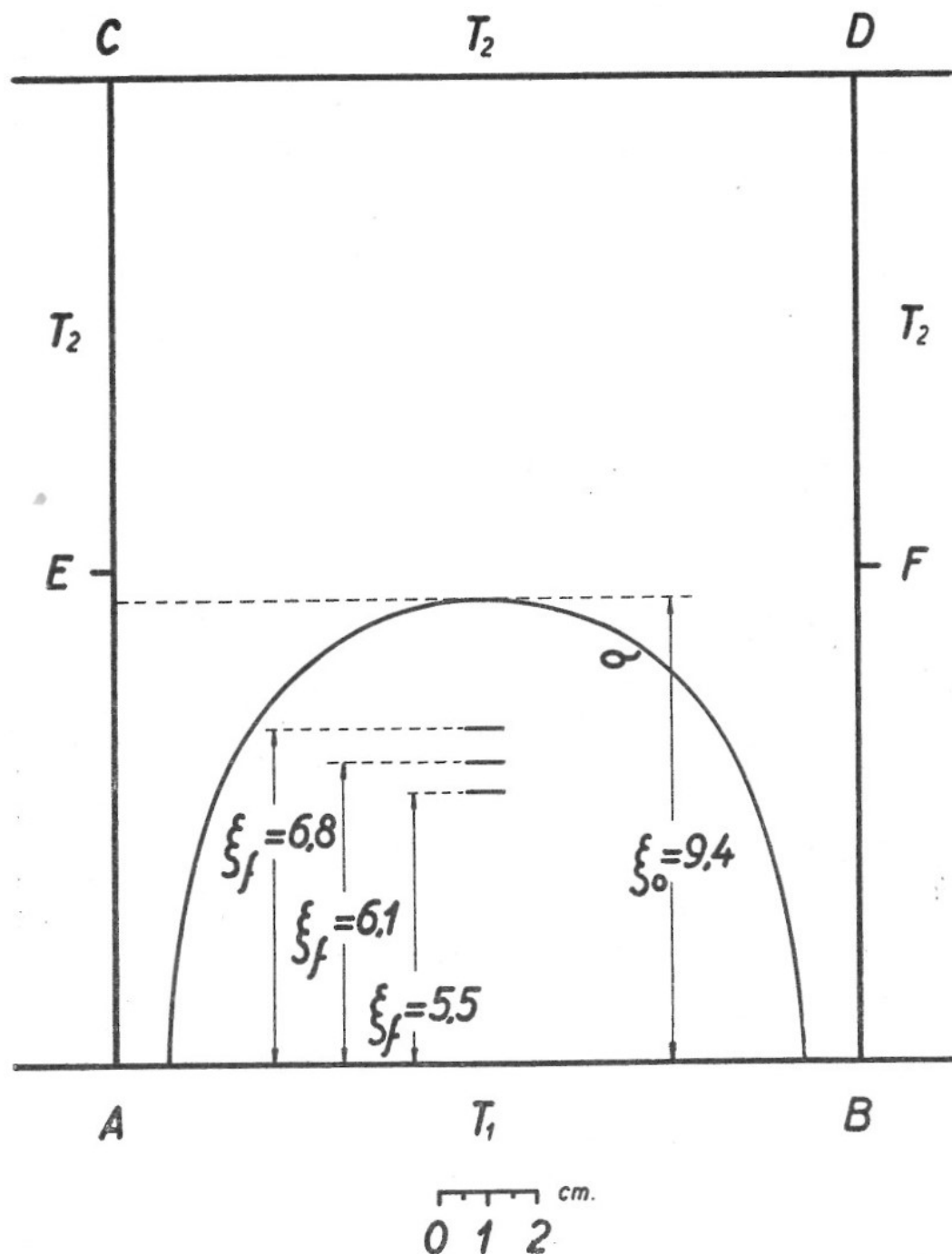


Fig. 9. - La curva  $\sigma$  rappresenta la conformazione della sommità dello strato sensibile; essa è stata dedotta elaborando i risultati della integrazione del sistema di equazioni (24). I valori di  $\xi_f$  riportati danno la misura dell'altezza della sommità dello strato in corrispondenza a tre diversi valori di  $\varepsilon_0$ .

Questi risultati sono stati ottenuti introducendo nella prima delle (23) i seguenti valori numerici:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 8,00 & \text{cal/mole } ^\circ\text{K} \\ P = 1,01 \cdot 10^6 & \text{dine/cm}^2 \\ R = 8,3 \cdot 10^7 & \text{erg/mole } ^\circ\text{K} \end{array}$$

ed assumendo per  $D$  e  $K$  il loro valor medio nell'intervallo di temperatura considerata. Tale assunzione è giustificata dal fatto che la soluzione del sistema differenziale (24) è molto poco sensibile al valore della costante  $\alpha$  (<sup>7</sup>); facendo infatti un controllo a posteriori, della sensibilità dei risultati finali al variare di  $D$  e  $K$  entro i limiti imposti dalle nostre condizioni di operazione, si verifica che il fatto di assumere per queste due grandezze il loro valor medio  $\bar{D}$  e  $\bar{K}$ , si ripercuote sui risultati finali in misura assolutamente trascurabile. Un'altra conseguenza importante di questo fatto è la seguente: se si assume per il rapporto di  $\bar{D}/\bar{K}$  il valore  $2,31 \cdot 10^3$  che caratterizza, nelle nostre condizioni di operazione, la miscela alcool metilico — aria, ed il valore  $2,80 \cdot 10^3$  che nelle stesse condizioni di operazione caratterizza la miscela alcool metilico-anidride carbonica, la differenza nelle distribuzioni della temperatura risulta essere di qualche decimo di grado. Questo fatto è particolarmente interessante perchè le nostre conclusioni si possono ritenere valide, almeno in prima approssimazione, per tutte quelle miscele, aventi come componente organico l'alcool metilico e come secondo componente un gas, per cui il rapporto  $\bar{D}/\bar{K}$  si scosta anche sensibilmente dai valori su riportati.

Facciamo infine osservare che dalla soluzione del sistema (24) si può dedurre che, stabilite certe condizioni sul bordo, la distribuzione delle pressioni parziali  $p_1(x, y)$  si mantiene costante per variazioni comunque grandi di  $\alpha$  mentre la distribuzione delle temperature  $T(x, y)$  ne dipende linearmente; dovendo quindi calcolare la distribuzione di  $p_1(x, y)$  e di  $T(x, y)$  per camere funzionanti ad elevate pressioni si è ricondotti alla valutazione delle sole temperature.

3.2) — Ai risultati a cui siamo pervenuti non è direttamente applicabile il procedimento illustrato al paragrafo 2.3, quando si voglia tener conto della condensazione del vapore su centri carichi; non sussistono infatti in questo caso quelle particolari condizioni di simmetria che allora ne hanno reso possibile l'applicazione in termini molto semplici. Nella teoria da noi svolta per una camera indefinita anche secondo l'asse  $x$ , ragioni di simmetria e condizioni di stazionarietà comportavano la formulazione delle due condizioni  $\underline{I}_1 = \underline{\Phi} = \text{cost.}$  e  $\underline{I}_2 \equiv 0 \equiv \underline{v}_2$ . Ora, mentre la seconda di queste sembra essere ancora accettabile nella trattazione bi-

dimensionale del nostro problema, la prima cade certamente in difetto, come chiaramente suggeriscono le stesse condizioni al contorno che noi abbiamo imposto per la integrazione del sistema (24). Per ragioni di simmetria è tuttavia possibile, seguendo la linea del calcolo relativo alla trattazione unidimensionale, valutare approssimativamente la depressione dello strato nel centro della camera, qualora si assuma un valor medio, rispetto alla quota, del modulo del vettore di flusso del vapore. Tale valor medio è facilmente calcolabile utilizzando i valori numerici riportati nelle colonne 7 delle tabelle I e II facendo uso della relazione (10).

Se ne deduce:

$$\bar{I}_1^{(y)}(x=7,5) = \bar{\Phi} = 5,23 \cdot 10^{-8} \text{ mole/cm}^2\text{sec.}$$

L'aver assunto, in questo caso,  $D$  costante e pari al suo valor medio porta ad una sensibile semplificazione nella relazione (16) che lega tra loro le grandezze  $\varepsilon'$  ed  $\eta'$ . Essa si riduce infatti alla

$$(26) \quad \varepsilon' = \eta'$$

che comporta, quindi, in virtù anche della (18), l'invarianza del parametro  $\eta'$  nelle successive tappe del procedimento di approssimazione; conseguentemente è evidente la possibilità di prestabilire la distribuzione della temperatura per  $0 \leq y \leq \xi$ .

Il valore del parametro  $\varepsilon_0$  è stato assunto, in questo caso, ricorrendo all'ipotesi, già formulata nella trattazione unidimensionale, che la riduzione del flusso del vapore sul fondo della camera deve essere proporzionale a  $\xi^{5/2}$ .

Indicando con l'indice  $u$  le grandezze incontrate nello svolgimento della teoria unidimensionale e con l'indice  $b$  quelle che intervengono nella teoria bidimensionale possiamo scrivere, giuste le ipotesi fatte, la:

$$(27) \quad \frac{\bar{\Phi}_b (1 - \varepsilon_{ob})}{\bar{\Phi}_u (1 - \varepsilon_{ou})} = \left( \frac{\xi_{ob}}{\xi_{ou}} \right)^{5/2}$$

Introducendo in essa per  $\bar{\Phi}_b$ ,  $\bar{\Phi}_u$ ,  $\xi_{ob}$  e  $\xi_{ou}$  i valori già incontrati e per  $\varepsilon_{ou}$  i valori 0,6; 0,7 e 0,8, con cui sono stati fatti i calcoli nel caso unidimensionale, si ricavano i corrispondenti valori per  $\varepsilon_{ob}$ .

Le distribuzioni finali della soprasaturazione sul centro della camera sono rappresentate in fig. 10 per i tre valori di  $\varepsilon_{ob}$  considerati; dalla in-

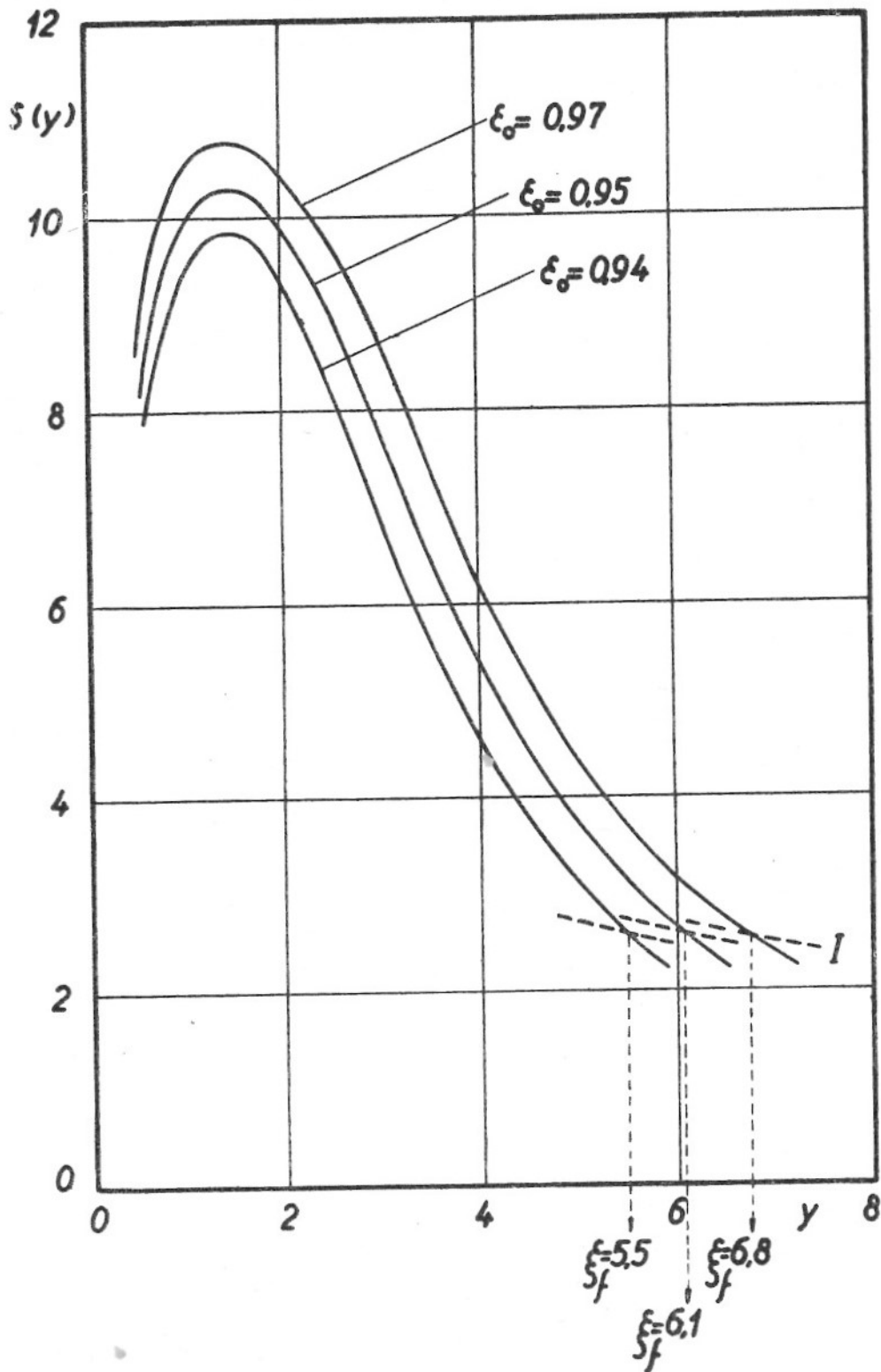


Fig. 10. - Le tre curve disegnate rappresentano la distribuzione della soprasaturazione (trattazione bidimensionale), per il centro della camera ed in funzione della quota, quando si tien conto della condensazione del vapore su centri carichi, per i valori indicati del parametro  $\epsilon_0$ . Le curve I rappresentano le distribuzioni della soprasaturazione critica per i tre casi considerati.

tersezione di queste curve con quelle che rappresentano la distribuzione della soprasaturazione critica I si deducono i corrispondenti valori dell'altezza massima dello strato sensibile  $\xi_t = 5,5; 6,1; 6,8$  rispettivamente.

#### 4) CONCLUSIONI.

Con la teoria svolta in questo lavoro noi pensiamo di aver risposto in modo soddisfacente ed assai semplice ad alcuni quesiti che, a nostro avviso, sono di grande importanza per particolari prestazioni che possono essere richieste ad una camera a diffusione. Normalmente tale strumento, in virtù del suo bassissimo tempo morto e della particolare geometria della zona sensibile alle radiazioni ionizzanti, viene utilizzato in esperienze condotte presso macchine acceleratrici. E' evidente, quindi, l'importanza di conoscere con la maggior precisione possibile la conformazione, e quindi il volume della zona sensibile, in funzione del carico ionico dell'ambiente ed oltre a questo, in quale misura possa mutare la sensibilità dello strumento in vicinanza delle sue pareti o di setti di materiale in esso introdotti.

A noi sembra possibile trarre le seguenti conclusioni:

1) Abbiamo limitato le nostre considerazioni, sia nella teoria unidimensionale che in quella bidimensionale al caso particolare di una camera funzionante per diffusione di alcool metilico in aria a pressione normale; l'aver scritto le equazioni che intervengono nel problema nella forma più generale possibile, consente ovviamente di poter trarre informazioni sul comportamento di camere funzionanti per diffusione di vapori organici diversi in gas mantenuti a pressioni diverse dalla normale e con una opportuna scelta del gradiente di temperatura. Questo lavoro di generalizzazione è attualmente in corso.

2) Nella trattazione unidimensionale siamo pervenuti a risultati consistenti con le osservazioni sperimentali per quel che riguarda l'altezza dello strato sensibile in funzione del numero di ioni per  $\text{cm}^3 \cdot \text{sec}$ . Facciamo notare che la nostra rappresentazione del funzionamento della camera a diffusione non richiede, come può accadere affrontando altrimenti il problema, l'assunzione di un carico ionico eccessivo [C. SUCCI e G. TAGLIAFERRI <sup>(3)</sup>], allo scopo di ottenere un buon accordo tra teoria e risultati sperimentali.

3) La curva rappresentata in fig. 5 consente di prevedere, con buona approssimazione, quale è l'altezza dello strato sensibile che si viene a determinare in conseguenza di un carico ionico noto.

4) Non è facile la valutazione della deformazione dello strato sensibile che si manifesta in vicinanza di setti di materiale posti nell'interno della camera o in vicinanza delle pareti della camera stessa. Da un punto di vista analitico il problema si può agevolmente affrontare sotto l'ipotesi che il gas si possa ritenere macroscopicamente in quiete, cioè che  $\underline{I}_2 \equiv 0 \equiv \underline{v}_2$  e quando non si tenga conto della condensazione del vapore su centri carichi; con un'opportuna scelta della distribuzione di temperatura sui setti o sulle pareti, non dovrebbero sussistere forti difficoltà sperimentali nella realizzazione della prima condizione.

5) Le difficoltà analitiche che intervengono quando si voglia valutare la depressione subita punto per punto dallo strato sensibile, in presenza di centri di condensazione, sono notevoli. Noi pensiamo che il criterio adottato per valutare la depressione subita dalla sommità dello strato sia soddisfacente per pratiche esigenze. L'esperienza ha confermato l'esistenza di una zona di insensibilità alle particelle ionizzanti in vicinanza di setti o delle pareti della camera, che è giusto dell'ordine di grandezza di quello previsto dalla nostra teoria.

## APPENDICE 1

A 1,1) Supponiamo che una miscela non omogenea di due gas sia contenuta in un recipiente a temperatura e pressione totale costante. Un moto di sola interdizione dei due gas tenderà ad uniformizzare le concentrazioni in tutto il recipiente. Al generico istante  $t$  ed in un punto generico  $P$ , all'interno del recipiente, il moto dei due gas può essere descritto con due vettori di diffusione  $\underline{I}_1$  e  $\underline{I}_2$ , definiti in modo tale che

$$(A\ 1,1) \quad \oint \underline{I}_i \times \underline{n} \, dS \quad (i = 1, 2)$$

rappresenti la quantità del gas 1 o 2 che attraversa, nell'intervallo di tempo unitario, l'areola  $dS$  la cui normale è diretta come il versore  $\underline{n}$ . Il vettore  $\underline{I}_1$  si potrà ritenere funzione del gradiente della concentrazione del gas 1 ed analogamente  $\underline{I}_2$  del gradiente di concentrazione del gas 2.

Per la prima legge di Fick <sup>(6)</sup> valgono, in queste ipotesi, le relazioni:

$$(A\ 1,2) \quad \underline{I}_1 = -D \operatorname{grad} c_1, \quad \underline{I}_2 = -D \operatorname{grad} c_2$$

con lo stesso valore del coefficiente di diffusione, per cui,

$$(A\ 1,3) \quad \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 0$$

Le espressioni (A 1,2) nel caso in cui, pur essendo costante la pressione totale nell'interno del recipiente, esista un gradiente di temperatura non nullo, si possono ridurre alle

$$(A\ 1,4) \quad \begin{aligned} \underline{I}_1 &= - \frac{D}{RT} \text{grad } p_1 \\ \underline{I}_2 &= - \frac{D}{RT} \text{grad } p_2 \end{aligned}$$

sussistendo ancora la relazione (A 1,3).

Le (A 1,4) rappresentano una comoda estensione al caso caratterizzato da una distribuzione della temperatura non uniforme e con  $P = p_1 + p_2 = \text{cost}$ , delle equazioni di Fick. Per  $T = \text{cost}$  le equazioni (A 1,4) si riducono alle (A 1,2) di Fick.

Per quanto precede siamo ora in grado di scrivere le equazioni (2) del testo che ci consentono di risolvere il nostro problema.

Possiamo scrivere infatti che

$$(A\ 1,5) \quad \underline{I}_1 = c_1 \underline{v}_1 \quad , \quad \underline{I}_2 = c_2 \underline{v}_2$$

ed, in presenza di un moto di convezione, introdurre come velocità di insieme nel punto P all'istante  $t$  la quantità

$$(A\ 1,6) \quad \underline{v} = \frac{c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2}{c_1 + c_2} ;$$

i vettori

$$\underline{I}_1^{(d)} = c_1 (\underline{v}_1 - \underline{v}) \quad \text{e} \quad \underline{I}_2^{(d)} = c_2 (\underline{v}_2 - \underline{v})$$

rappresentano i vettori di flusso del vapore e del gas per l'osservatore che all'istante  $t$  si trova in P con la velocità  $\underline{v}$ .

Per definizione

$$(A\ 1,7) \quad \underline{I}^{(d)} = \underline{I}_1^{(d)} + \underline{I}_2^{(d)} = 0$$

e l'osservatore in moto con velocità  $\underline{v}$  in P all'istante  $t$  osserva un moto di sola interdiffusione di vapore e gas, caratterizzato dai vettori  $\underline{I}_1^{(d)}$  e  $\underline{I}_2^{(d)}$  la cui somma è nulla.

Sarà:

$$(A\ 1,8) \quad \underline{I}_1^{(d)} = - \frac{D}{RT} \text{grad } p_1$$

$$\underline{I}_2^{(d)} = - \frac{D}{RT} \text{grad } p_2$$

Le equazioni di conservazione della materia si scrivono, riferendosi a condizioni stazionarie, nel seguente modo:

$$(A\ 1,9) \quad \text{div } \underline{I}_1 = 0 \quad , \quad \text{div } \underline{I}_2 = 0$$

e, tenuto conto soltanto dei fenomeni di conduzione e di convezione, la

$$(A\ 1,10) \quad \text{div } \left\{ -K \text{grad } T + T (\lambda \underline{I}_1 + \lambda \underline{I}_2) \right\} = 0$$

traduce il principio di conservazione del calore.

Le considerazioni svolte portano ovviamente alla scrittura del sistema di equazioni (2) del testo.

A 1,2) Come conseguenza del fatto che  $\underline{I}_1 = \underline{\Phi} = \text{cost.}$  e  $\underline{I}_2 \equiv 0 \equiv \underline{v}_2$ , non è difficile, partendo dalle equazioni d) e c) del sistema (2) unitamente alle (3) ricavare la distribuzione della tensione di vapore in una trattazione unidimensionale.

Possiamo infatti scrivere la d) e la c) nella forma

$$(A\ 1,11) \quad -\Phi = \frac{c_1}{c_1 + c_2} c_1 v_1 - \frac{D}{RT} \frac{d p_1}{d y}$$

$$0 = \frac{c_2}{c_1 + c_2} c_1 v_1 + \frac{D}{RT} \frac{d p_1}{d y}$$

Assumendo per la funzione  $T(y)$  una espressione del tipo  $T(y) = Ay + B$  con  $A = \frac{T_2 - T_1}{h}$  e  $B = T_1$  e per il coefficiente di diffusione  $D$  un legame di dipendenza da  $T$  del tipo (4), le (A 1,11) porgono

$$(A\ 1,12) \quad p_1 - P = c (Ay + B)^{\gamma/A} \quad (c = \text{cost.})$$

$$\text{con } \gamma = \frac{R \Phi T_1^2}{P D_1} .$$

Per  $y = 0$ ,  $p_1$  deve assumere il valore della tensione di vapore saturo  $p_{1s}(0)$  alla temperatura  $T_1$ ; segue che

$$(A\ 1,13) \quad p_1 = P - (P - p_{1s}(0)) B^{\gamma/\Delta} (Ay + B)^{\gamma/\Delta};$$

se si osserva che nelle ordinarie condizioni di operazioni di una camera a diffusione  $P \gg p_{1s}(0)$ , la relazione scritta si riduce alla (6) del testo.

## APPENDICE 2

A 2,1) Nel paragrafo 2.3 noi abbiamo formulato alcune ipotesi per cercare di valutare quale è la deformazione subita dalla distribuzione della soprasaturazione  $S_0(y)$ , quando si vuole completare la teoria della camera tenendo conto della condensazione del vapore su centri carichi; ci proponiamo ora di descrivere con qualche dettaglio lo sviluppo del calcolo derivante da queste ipotesi e dalla imposizione delle quattro condizioni a), b), c), d) discusse nel testo.

L'espressione

$$(A\ 2,1) \quad I^* = - \frac{D(T^*) P}{P - p_1^*} \frac{1}{RT^*} \frac{d p_1^*}{d y}$$

è la estensione immediata della (10) che ci rappresenta il vettore di flusso nella teoria unidimensionale, quando si trascura l'effetto della condensazione.

Supponendo nella (A 2,1)  $D(T^*) \propto D(T)$ ,  $I^*$  si può scrivere, a parte il fattore  $DP/R$  e tenuto conto della (10) e della (11), in uno dei due modi seguenti:

$$(A\ 2,2) \quad \frac{\epsilon + \epsilon'y}{T} \frac{d \ln (P - p_1)}{d y}$$

oppure

$$(A\ 2,3) \quad \frac{1}{T^*} \frac{d \ln (P - p_1^*)}{d y}$$

che uguagliate tra loro danno

$$(A\ 2,4) \quad (\epsilon + \epsilon'y) (\eta + \eta'y) \frac{d \ln (P - p_1)}{d y} = \frac{d \ln (P - p_1^*)}{d y}$$

da cui deriva

$$(A\ 2,5) \quad \int \frac{P - p_1^*}{P - p_{1s}} d \ln (P - p_1^*) = -\gamma \int_0^y (\varepsilon + \varepsilon'y) (\eta + \eta'y) \frac{dy}{Ay + B}$$

tenendo presente che [Appendice 1, (A 1,13)]

$$(A\ 2,6) \quad \ln (P - p_1) = \ln (P - p_{1s}) - \frac{\gamma}{A} \ln \frac{Ay + B}{B}$$

Gli estremi di integrazione per il primo membro della (A 2,5) sono stati scelti imponendo che, per  $y = 0$ ,  $p_1 = p_{1s}(T_1)$ ; ciò significa esprimere il fatto che si può ammettere che sul fondo della camera  $p_1$  e  $p_1^*$  devono coincidere con la tensione di vapore saturo  $p_{1s}$  alla temperatura  $T_1$ .

Risolvendo l'integrale (A 2,5) si ottiene

$$(A2, 7) \quad \ln \frac{P - p_1^*}{P - p_{1s}(T_1)} = - \frac{\gamma}{B} [y]$$

in cui è chiaro il significato del simbolo  $[y]$ .

Sostituendo in  $[y]$  al posto di  $\eta$  ed  $\varepsilon$  rispettivamente i valori 1 ed  $1-\varepsilon'\xi$  [(13) e (14)] esso si riduce alla funzione di  $y$  e  $\xi$ :

$$(A\ 2,8) \quad F(y, \xi) = y - \varepsilon'\xi - \frac{1}{2} \frac{A}{B} y + \frac{1}{2} \frac{A}{B} \varepsilon'\xi y + \frac{1}{2} \eta'y - \frac{1}{2} \varepsilon'\eta'\xi y + \frac{1}{2} \varepsilon'y$$

Imponiamo ora la condizione

$$(A\ 2,9) \quad p_1^*(\xi) = p_1(\xi);$$

ciò significa richiedere la continuità per la tensione di vapore  $p_1^*$  per  $y = \xi$ .

Dalle (A 2,6), (A 2,7) e (A 2,9) segue:

$$(A\ 2,10) \quad \ln \frac{P - p_1^*(\xi)}{P - p_{1s}(T_1)} = - \frac{\gamma}{B} F(\xi, \xi) = \ln \frac{P - p_1(\xi)}{P - p_{1s}(T_1)} = - \frac{\gamma}{B} \left( \xi - \frac{1}{2} \frac{A}{B} \xi^2 \right)$$

cioè

$$(A\ 2,11) \quad F(\xi, \xi) = \xi - \frac{1}{2} \frac{A}{B} \xi^2$$

Questa espressione può essere facilmente semplificata e ridotta alla

$$(A\ 2,12) \quad \varepsilon' \left( \frac{A}{B} \xi - 1 \right) + \eta' - \varepsilon' \eta' \xi = 0$$

che costituisce il legame cercato tra  $\varepsilon'$ ,  $\eta'$  e  $\xi$  (formula (16) del testo).

L'espressione (17) del testo si ottiene facilmente sostituendo nella (A 2,8) al posto del termine  $\varepsilon' \eta' \xi$  l'espressione fornita dalla (A 2,12).

### APPENDICE 3

L'integrazione del sistema di equazioni (24) nel dominio rettangolare (indicato nel seguito con la lettera d) rappresentato in fig. 6 è attualmente in corso con diverse condizioni sul bordo (indicato nel seguito con fd).

Tali condizioni sono state da noi scelte in modo da corrispondere a situazioni fisiche di non difficile realizzazione sperimentale. Quella più semplice, come è stato discusso nel testo, è di imporre una certa distribuzione di temperatura su tutto fd e di creare anche sulle pareti AC e BD di esso, quelle condizioni per cui la tensione di vapore assume, punto per punto, il valore che soddisfa la equazione di Clausius-Clapeyron per le temperature date (ciò potrebbe essere facilmente realizzato rivestendo le pareti con velluto imbevuto di alcool). Tale condizione per la tensione di vapore potrebbe essere realizzata anche solo per certe determinate zone delle pareti; questo non è certo di facile realizzazione sperimentale poiché significherebbe impedire la condensazione del vapore sulle zone su cui non si vuole che tale condizione sia soddisfatta.

Noi chiameremo queste ultime « zone di impenetrabilità » per il vapore; per esse possiamo scrivere che  $\frac{\partial P_1}{\partial x} \equiv 0$ , in conseguenza della (10).

I casi da noi presi in considerazione oltre a quello discusso nel testo sono i seguenti:

#### I° Caso

$$T_{fd} \left\{ \begin{array}{ll} T(x,0) = 213 & T(x,b) = 293 \\ T(0,y) = T(a,y) = \begin{cases} 213 + 8y, & 0 \leq y \leq b/2 \\ 293 & b/2 \leq y \leq b \end{cases} \end{array} \right.$$

a)

$$p_{1fd} \left\{ \begin{array}{l} p_1(x,b) = p_{1s}[T(x,b)] \quad , \quad p_1(x,0) = p_{1s}[T(x,0)] \\ p_1(0,y) = p_1(a,y) = p_{1s}[T(0,y)] \quad , \quad b/2 \leq y \leq b \\ \partial p_1(0,y)/\partial x = \partial p_1(a,y)/\partial x = 0 \quad , \quad 0 \leq y \leq b/2 \end{array} \right.$$

b)

$$p_{1fd} \left\{ \begin{array}{l} p_1(x,b) = p_{1s}[T(x,b)] \quad , \quad p_1(x,0) = p_{1s}[T(x,0)] \\ \partial p_1(0,y)/\partial x = \partial p_1(a,y)/\partial x = 0 \end{array} \right.$$

II° Caso

$$T_{fd} \left\{ \begin{array}{l} T(x,0) = 213 \quad , \quad T(x,b) = 293 \\ T(0,y) = T(a,y) = 213 + 4y \end{array} \right.$$

a)

$$p_{1fd} \left\{ \begin{array}{l} p_1(x,b) = p_{1s}[T(x,b)] \quad , \quad p_1(x,0) = p_{1s}[T(x,0)] \\ \partial p_1(0,y)/\partial x = \partial p_1(a,y)/\partial x = 0 \end{array} \right.$$

b)

$$p_{1fd} \left\{ \begin{array}{l} p_1(x,b) = p_{1s}[T(x,b)] \quad , \quad p_1(x,0) = p_{1s}[T(x,0)] \\ p_1(0,y) = p_1(a,y) = p_{1s}[T(a,y)] \end{array} \right.$$

E', inoltre, in corso di studio la possibilità di risolvere il sistema (24) in coordinate cilindriche, al fine di poter confrontare i nostri risultati sperimentali, direttamente riferentisi ad una camera cilindrica, con quelli teorici.

Vogliamo esprimere il nostro ringraziamento al Prof. E. AMALDI ed al Prof. E. PANCINI per l'interessamento dimostrato a questo lavoro e per aver reso possibile la collaborazione tra gli Istituti di Fisica delle Università di Roma e di Genova.

Siamo grati al Prof. M. PICONE, direttore dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo del C.N.R., che ci ha permesso di fare ese-

guire l'integrazione del sistema di equazioni differenziali (24) presso il suo Istituto.

Al Prof. M. AGENO dell'Istituto Superiore di Sanità il nostro particolare ringraziamento per le stimolanti discussioni ed il criticismo con cui ha riveduto questo lavoro.

Roma — Istituto Superiore di Sanità - Laboratorio di fisica e Istituto di fisica dell'Università.

#### BIBLIOGRAFIA

- (<sup>1</sup>) LANGSDORF A. Jr. - R.S.I., 10: 91 (1939).
- (<sup>2</sup>) COWAN E. W. - R.S.I., 21: 991 (1950); NEEDELS T. and NIELSEN G. - R.S.I., 21: 976 (1950); NIELSEN G., NEEDELS T. and VEDDLE O. - R.S.I., 22: 673 (1951).
- (<sup>3</sup>) SHUTT R. P. - R.S.I., 22: 730 (1951); SUCCI C., TAGLIAFERRI G. - Nuovo Cimento, 9: 1092 (1952); LOVATI A., SUCCI C. - Nuovo Cimento, 11: 963 (1953); BEVAN A.R. - J. Sci. Instrum., 31: 48 (1954).
- (<sup>4</sup>) FOWLER E. C., FOWLER W. B., SHUTT R. P., THORNDIKE A. M., WHITTEMORE W. L. - Phys. Rev., 91: 135 (1953); FOWLER W. B., SHUTT R. P., THORNDIKE A. M., WHITTEMORE W. L. - Phys. Rev., 93: 861 (1954); FOWLER W. B., SHUTT R. P., THORNDIKE A. M., WHITTEMORE W. L. - Phys. Rev., 95: 1026 (1954); FIREMAN E. L., SHWARZER D. - Phys. Rev., 94: 385 (1954); ALSTON M. H., CREWE A. V., EVANS W. H., GREEN L. L., WILLMOTT J. C. - Proc. Phys. Soc. A., 67: 637 (1954).
- (<sup>5</sup>) KUUSINEN J. - Ann. der Phys., 24: 445 (1935).
- (<sup>6</sup>) FICK - Pogg. Ann., 94: 59 (1855).
- (<sup>7</sup>) D'ANGELO N. - Tesi di Laurea - Roma, 1953.
- (<sup>8</sup>) International Critical Tables, vol. V, p. 62.
- (<sup>9</sup>) WILSON J. G.: The Principles of Cloud-Chamber Technique; University Press. Cambridge, 1951.
- (<sup>10</sup>) DAS GUPTA N. N. and GHOSH S. K. - Rev. Mod. Phys., 18: 225 (1946); LANDER R. L., NIELSEN C. E. - R.S.I., 24: 20 (1953).
- (<sup>11</sup>) ARGAN P. E., D'ANGELO N., GIGLI A. - La Ricerca Scientifica, 24: 1006 (1954).
- (<sup>12</sup>) Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo del C.N.R. Roma, maggio 1954 (non pubblicato).