33. Mario AGENO. — **Sulla dipendenza dall'energia delle sezioni d'urto nucleari per neutroni veloci.**

Riassunto. — Si ricalcolano le sezioni d'urto nucleari per neutroni veloci, col procedimento di Weisskopf, assumendo anche all'interno del nucleo le autofunzioni esatte (per potenziale costante), anzichè le loro espressioni asintotiche.

Résumé. — On calcule à nouveau les sections efficaces nucléaires pour les neutrons rapides, avec la méthode de Weisskopf, en prenant aussi à l'intérieur du noyau les fonctions propres exactes (pour un potentiel constant), au lieu de leurs expressions asymptotiques.

Summary. — The nuclear cross-sections for fast neutrons has been recalculated by the Weisskopf method, assuming also within the nucleus the exact eigenfunctions (by constant potential), instead of their asymptotic expressions.

Zusammenfassung. — Die Kernquerschnitten für schnelle Neutronen werden nach der Weisskopfmethode wiedererrechnet, unter Heranziehung der genauen Eigenfunktionen auch für das Kerninnere (bei konstantem Potential) anstelle ihres asympotischen Ausdrücke.

1.

Uno dei metodi più convenienti per la determinazione dei raggi nucleari consiste, com'è noto, nella misura della sezione d'urto totale dei nuclei in questione per neutroni veloci ([1],[2]).

Se l'energia dei neutroni incidenti è abbastanza elevata, le particolarità della struttura interna dei nuclei non hanno più alcuna influenza sulla sezione d'urto e il nucleo urtato si comporta sostanzialmente come una sfera diffondente e assorbente. Se poi la lunghezza d'onda efficace dei neutroni è piccola in confronto al raggio nucleare,

---

([1]) J. M. Blatt, V. F. Weisskopf: Tech. Rep. N. 42, may 1, 1950, M. I. T.
([2]) D. Curie: J. de Phys. et le Rad., 12-941 (1951).

scende da una teoria semiclassica di Bohr, Peierls e Placzeck ([3,4]) che le sezioni d'urto per cattura e per sparpagliamento elastico sono ambedue uguali alla sezione geometrica e di conseguenza la sezione d'urto totale risulta:

$$\sigma_t = \sigma_c + \sigma_{sp} = 2\pi R^2 \qquad (1)$$

essendo R il raggio del nucleo.

La prima condizione è in pratica già soddisfatta per neutroni di una diecina di MeV, mentre la seconda dovrebbe esserlo tanto più quanto maggiore è l'energia dei neutroni incidenti.

In realtà, le misure di sezione d'urto totale eseguite per numerosi elementi da vari Autori ([5-25]), con neutroni di energia compresa tra 14 e 370 MeV hanno messo in evidenza una rapida diminuzione di tali sezioni d'urto fino a circa 100 MeV, seguita per energie maggiori da un andamento pressochè costante. A titolo di esempio abbiamo raccolto nella fig. 1 i dati noti sull'andamento della sezione d'urto neutrone-protone per neutroni di energia di 14 MeV e nella fig. 2 i dati già raccolti da De Juren e Mayer ([16]) relativi alla sezione d'urto di C, Al, Cu, Pb.

([3]) N. Bohr, R. Peierls, G. Placzek: 144-200 (1939).
([4]) H. A. Bethe: Phys. Rev., 57-1125 (1939).
([5]) R. Sherr: Phys. Rev., 68-240 (1947).
([6]) E. Amaldi, D. Bocciarelli, B. N. Cacciapuoti, G. C. Trabacchi: Rend. Lincei 1-29 (1946)
([7]) Id.: Nuovo Cimento, 3-15 (1946).
([8]) Id.: Nuovo Cimento 3-203 (1946).
([9]) L. J. Cook, E. M. Mc Millan, J. M. Peterson, D. C. Sewell: Phys. Rev., 75-7 (1949)
([10]) A. Bratenahl, S. Fernabach, R. H. Hildebrand, C. E. Leith, B. J. Mayer: Phys. Rev., 77-597 (1950).
([11]) J. De Juren, N. Knable: Phys. Rev., 77-606 (1950).
([12]) R. Fox. C. Leith, L. Wouters, K. R. Mackenzie: Phys. Rev. 80-23 (1950).
([13]) J. De Juren: Phys. Rev., 80-27 (1950).
([14]) R. H. Hildebrand, C. E. Leith: Phys. Rev., 80-842 (1950).
([15]) A. H. Lasday: Phys. Rev., 84-139 (1951).
([16]) J. De Juren, B. J. Mayer: Phys. Rev., 84-919 (1951).
([17]) M. Ageno, G. Cortellessa, R. Querzoli: Rend. Ist. Sup. Sanità, XV-535 (1952).
([18]) M. Ageno, G. Cortellessa, R. Querzoli: Rend. Acc. Lincei, XIII, n. 5 (1952).
([19]) M. Ageno, G. Cortellessa, R. Querzoli: Nuovo Cimento 10-281 (1953).
([20]) H. L. Poss, E. O. Salant, L. C. L. Yuan: Phys. Rev., 85-703 (1952) Abs.
([21]) H. L. Poss, E. O. Salant, G. A. Snow, L. C. L. Yuan: Phys. Rev., 87-11 (1952).
([22]) D. J. Meyer, W. Nyer: Los Alamos Report, n. 1279, 1951 (citato in [20]).
([23]) J. H. Coon, E. R. Graves, H. H. Barshall: Phys. Rev., 88-562 (1952).
([24]) J. Hadley, E. Kelly, C. Leith, E. Segrè, C. Wiegand, H. York: Phys. Rev., 75-351 (1949).
([25]) E. Kelly, C. Leith, E. Segrè, C. Wiegand: Phys. Rev., 79-96 (1950).

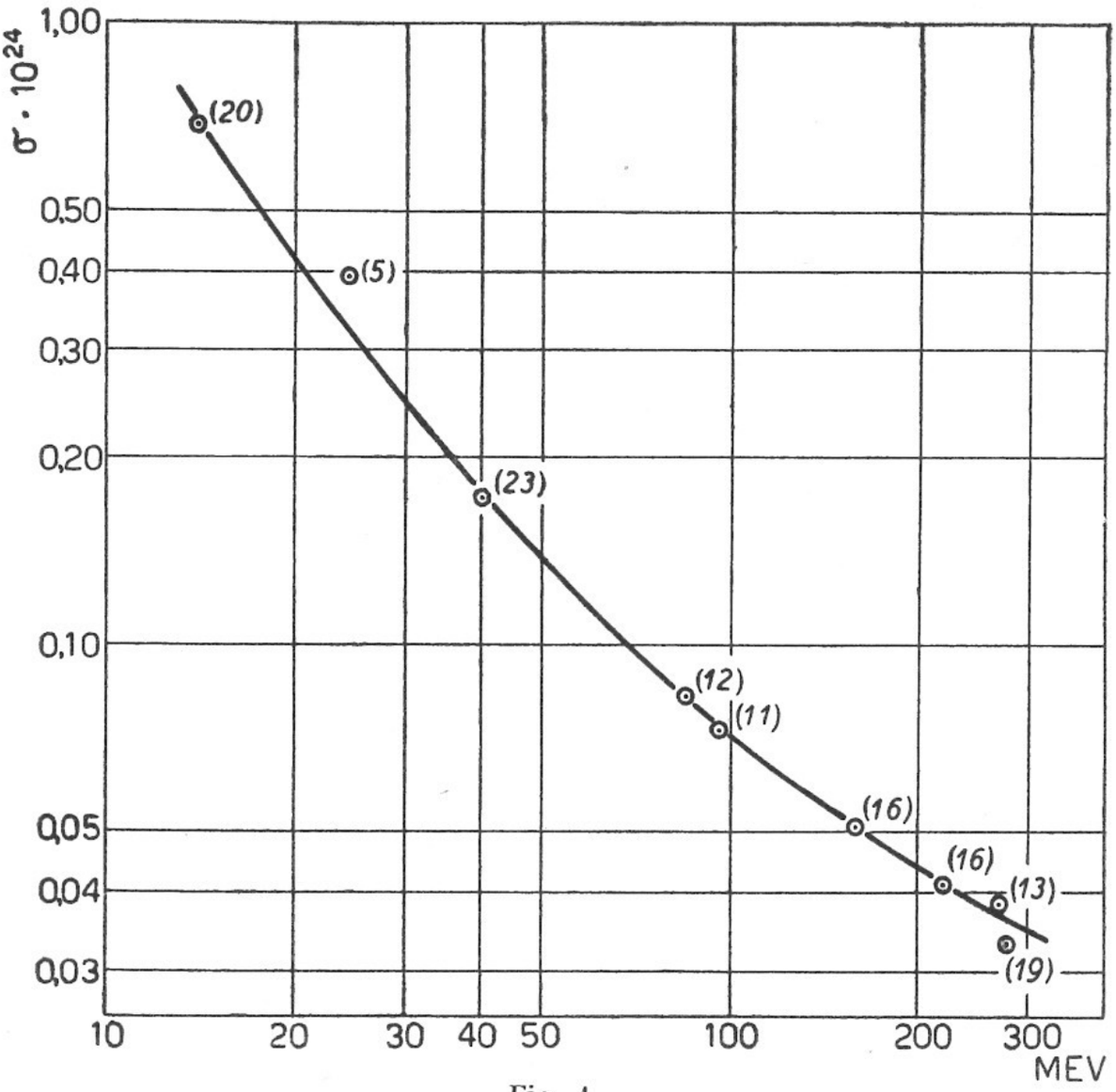

Fig. 1.
Sezione d'urto neutrone-protone
(i numeri si riferiscono alla bibliografia).

Tale andamento non è neppure qualitativamente previsto dalla teoria elementare di cui abbiamo parlato. Resultati un po' migliori si ottengono con una teoria fenomenologica quantisticamente coerente, dovuta a H. Feshbach e V. F. Weisskopf ([26]) in cui il nucleo è trattato come una buca di potenziale sferica, a bordo netto e potenziale interno costante. Tale teoria prevede che la (1) sia valida solo al limite per elevatissimi valori dell'energia e che, per energie più basse, la sezione d'urto totale decresca regolarmente al crescere dell'energia verso il valore asintotico $2\pi R^2$. Il grosso della diminuzione risulta effettivamente nella zona al di sotto dei 100 MeV, come si trova sperimentalmente, ma la diminuzione prevista resta inferiore a quella sperimentale per un fattore da due a tre.

([26]) Phys. Rev., 76-1550 (1949).

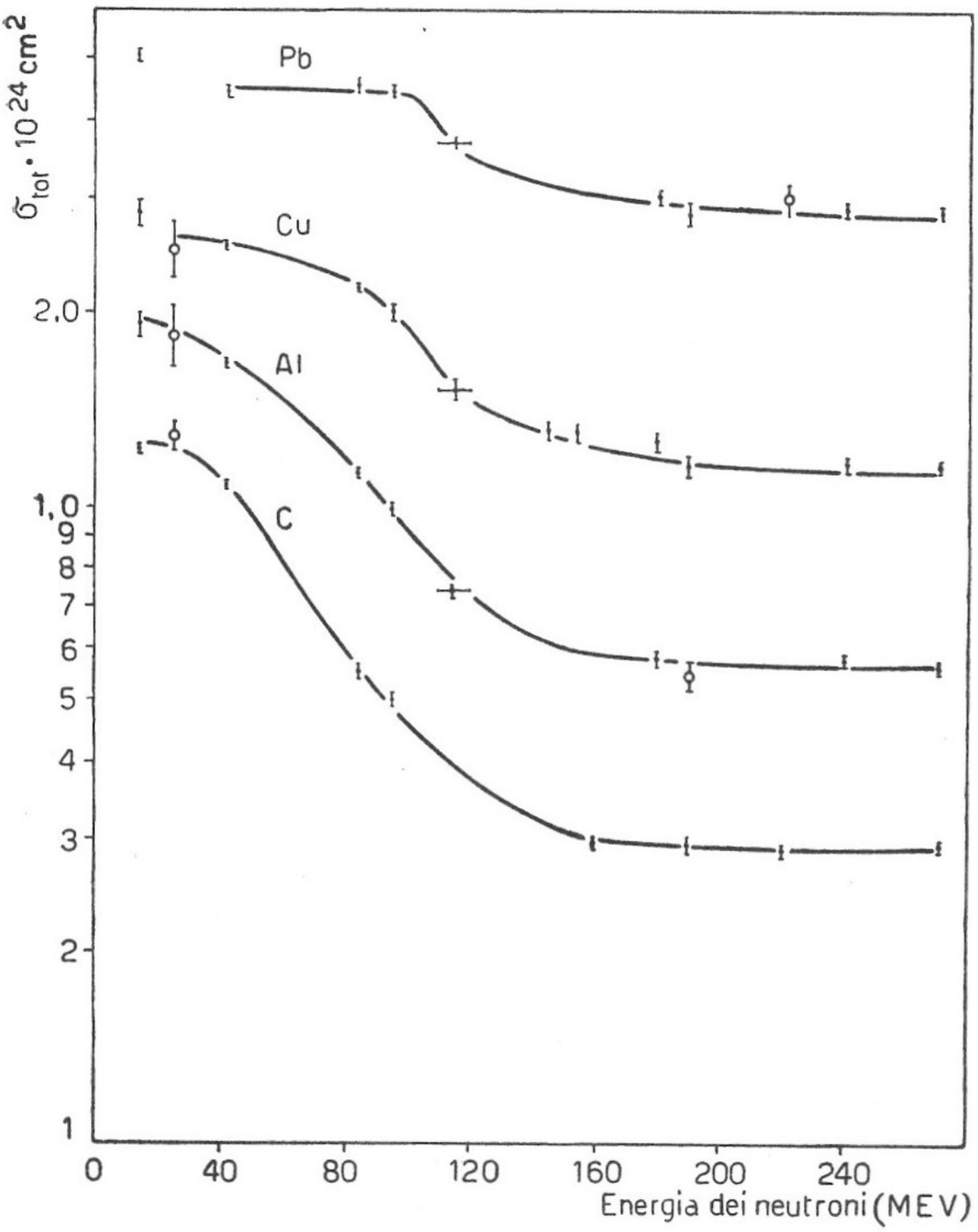

Fig. 2.
Sezioni d'urto per neutroni veloci.

La spiegazione che è stata proposta e che è generalmente ammessa, per l'andamento della sezione d'urto in funzione dell'energia dei neutroni incidenti, si basa sull'osservazione che un neutrone veloce ha una probabilità non nulla e certamente rapidamente crescente al crescere della sua energia di attraversare il nucleo senza interagire con nessuna particella nucleare. In altre parole, i nuclei debbono resultare parzialmente trasparenti per neutroni di energia sufficientemente ele-

vata. La teoria del fenomeno ([27, 28]) è stata sviluppata da FERNBACH, SERBER e TAYLOR, schematizzando il nucleo investito dalle onde neutroniche incidenti come una sfera materiale, caratterizzata da un indice di rifrazione e da un coefficiente di assorbimento. Assumendo un valore ragionevole per il cammino libero medio dei neutroni nella materia nucleare, questi Autori giustificano il calo delle sezioni d'urto totali tra 14 e 100 MeV. Per altro, l'andamento generale previsto dalla loro teoria è regolarmente decrescente al crescere dell'energia e non ha molto a che fare con l'andamento sperimentale sopra descritto.

Un accordo un po' migliore tra teoria ed esperienza è stato infine ottenuto da JASTROW ([29, 30]) partendo dall'ipotesi che l'interazione tra due nucleoni si possa descrivere mediante le forze derivanti da un nocciolo repulsivo a corto raggio situato al centro della buca di potenziale attrattiva. Sviluppando i calcoli secondo le linee della teoria ottica di SERBER ([27, 28]), R. JASTROW giunge alla conclusione che solo l'esistenza di un tale nocciolo centrale repulsivo nell'interazione nucleone-nucleone può giustificare l'andamento delle sezioni d'urto per neutroni veloci tra 10 e 100 MeV.

2.

Come si è detto, anche la teoria fenomenologica di WEISSKOPF prevede una diminuzione delle sezioni d'urto totali, press'a poco nella zona in cui la si osserva sperimentalmente. Tale diminuzione è sensibilmente inferiore a quella sperimentale, ma il fatto conserva lo stesso un certo interesse, dato che la teoria in questione non introduce il concetto di trasparenza dei nuclei.

Ciò suggerisce anzi la questione seguente: se non sia possibile modificare la teoria di WEISSKOPF in modo tale da render conto dell'andamento sperimentale delle sezioni d'urto tra 10 e 100 MeV, senza ricorrere al concetto di trasparenza. O meglio: vedere quale parte della diminuzione sperimentale si può giustificare, senza ricorrere a tale concetto.

La teoria di WEISSKOPF si sviluppa secondo le linee seguenti. Definito il raggio del nucleo come la minima distanza dal centro di questo alla quale non sono più sensibili le forze tipicamente nucleari, la funzione d'onda ψ dei neutroni incidenti, al di fuori del nucleo, viene rappresentata da una sommatoria del tipo:

([27]) R. SERBER: Phys. Rev., 72-1114 (1947).
([28]) S. FERNBACH, R. SERBER, T. B. TAYLOR: Phys. Rev., 75-1352 (1949).
([29]) Phys. Rev., 81-165 (1951).
([30]) Phys. Rev., 82-261 (1951).

$$r\psi = \Sigma_l \ (u_l + \eta_l \ v_l) \qquad r > R \qquad (2)$$

ove u_l e v_l sono quelle soluzioni dell'equazione radiale di Schrödinger per potenziale esterno uguale a zero e quanto azimutale l, che hanno le espressioni asintotiche:

$$u_l \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{-i\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)} \qquad \text{(onda incidente)}$$

$$v_l \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{+i\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)} \qquad \text{(onda riflessa)}$$

All'interno del nucleo (che nella teoria viene considerato come completamente assorbente) la funzione d'onda viene approssimata mediante un'onda puramente convergente del tipo:

$$r\psi = \Sigma_l \ A_l \ e^{-ikr} \qquad r < R \qquad (3)$$

Il numero d'onde K dei neutroni dentro il nucleo viene valutato in base a un modello statistico del nucleo alla Fermi-Dirac, in funzione del numero d'onde k al di fuori del nucleo, del raggio nucleare R e del numero di massa A.

Il raccordo tra (2) e (3) viene fatto imponendo la continuità della derivata logaritmica della funzione d'onda alla superficie del nucleo. Si ottiene così per ciascun valore di l una condizione che permette di determinare η_l. Le sezioni d'urto sono allora date dalle note formule:

$$\sigma_c^{(l)} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \left[1 - |\eta_l|^2 \right] \qquad (4)$$

$$\sigma_{sp}^{(l)} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \left| 1 + \eta_l \right|^2 \qquad (5)$$

$$\sigma_{tot}^{(l)} = \sigma_c^{(l)} + \sigma_{sp}^{(l)} = \frac{2\pi}{k^2} (2l+1) (1 + \mathrm{Re} \ \eta_l) \qquad (6)$$

che vanno infine sommate rispetto all'indice l.

Una critica che si può fare a questa teoria riguarda la poca coerenza della posizione (3) col modello nucleare assunto in partenza. E' bensì vero che l'effettiva autofunzione del neutrone entro il nucleo non sarà neppure esprimibile come funzione di r e che quindi la (3) rappresenta un'approssimazione giustificata quanto qualsiasi altra. Inoltre, essendo di solito $K >> k$, almeno in un certo campo di energie sarà lecito sostituire all'interno del nucleo le soluzioni corrette della equazione di

Schrödinger per potenziale costante con le loro espressioni asintotiche. D'altra parte, però, non è detto che questa sostituzione sia senza apprezzabili conseguenze alle energie intermedie, che sono proprio quelle che ci interessano, tanto più che mentre a prima vista potrebbe sembrare lecito per altissimi valori dell'energia ($kR >> 1$) sostituire a u_l e v_l le loro espressioni asintotiche anche al di fuori del nucleo, la conseguenza di una tale sostituzione è che (come subito si verifica) le somme rispetto ad l di (4), (5) e (6) in questo caso addirittura divergono.

Mi è quindi parso che mettesse conto ricalcolare le sezioni d'urto senza fare l'approssimazione di Weisskopf, ma assumendo anche all'interno del nucleo le autofunzioni corrette. E' naturalmente prevedibile che si giunga a resultati sostanzialmente identici a quelli di Weisskopf per energie elevatissime, mentre è possibile che si abbiano delle differenze sensibili per energie intermedie, e forse proprio nella zona al disotto dei 10 MeV in cui si osserva quella rapida diminuzione delle sezioni d'urto totali di cui nè la teoria di Weisskopf, nè quella di Seber danno ragione, a meno che non si ricorra all'ipotesi di Jastrow.

Al posto della (3) occorre dunque fare la posizione:

$$r\psi = \Sigma_l \; A_l \; u_l \qquad\qquad r < R \qquad\qquad (7)$$

Il fatto che nella sommatoria non compaiono i termini con le v_l esprime l'ipotesi che il nucleo sia totalmente assorbente. Posto allora $x = kR$ e $X = KR$, imponendo come fa Weisskopf la continuità della derivata logaritmica alla superficie del nucleo, si ha da (2) e (7), per ogni l:

$$x \, \frac{u'(x) + \eta \, v'(x)}{u(x) + \eta \, v(x)} = X \, \frac{u'(X)}{u(X)} \qquad\qquad (8)$$

Poniamo ora (sempre per ogni l):

$$v = |v| \, e^{i\delta} \qquad\qquad u = |v| \, e^{-i\delta}$$

$$v' = |v'| \, e^{i\delta'} \qquad\qquad u' = |v'| \, e^{-i\delta'}$$

(u e v sono infatti complesse coniugate e tali sono quindi anche u' e v'). Se, per semplicità di scrittura, conveniamo di contrassegnare con una sottolineatura quelle funzioni che vanno prese sull'argomento X, intendendo che tutte le altre vadano prese sull'argomento x, si ricava allora dalla (8), per η l'espressione:

$$\eta = \frac{-\,x\,|\underline{v}|\,|v'|\,e^{-i\,(\delta' + \underline{\delta})} + X\,|v|\,|\underline{v}'|\,e^{-i\,(\underline{\delta}' + \delta)}}{x\,|\underline{v}|\,|v'|\,e^{i\,(\delta' - \underline{\delta})} - X\,|v|\,|\underline{v}'|\,e^{i\,(\delta - \underline{\delta}')}} \qquad (9)$$

formula questa che vale per ogni valore di l.

Per passare da qui al calcolo delle sezioni d'urto, conviene tener conto del fatto che siccome nell'equazione radiale di Schrödinger non compare la derivata prima, il Wronskiano delle due soluzioni u, v per la formula di Liouville è costante. Calcolandone il valore per $x \to \infty$, per cui valgono le espressioni asintotiche, si trova che moduli e argomenti sono sempre legati dalla relazione:

$$|v|\,|\underline{v}'|\,\operatorname{sen}\,(\delta' - \delta) = 1 \qquad (10)$$

valida anche questa per ogni valore di l.

Inserendo nelle espressioni (4), (5), (6) delle sezioni d'urto la (9) e tenendo conto della (10) si trova con semplici calcoli algebrici:

$$\sigma_c^{(l)} = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\,\frac{x\,X}{x^2\,|v'_l\underline{v}_l|^2 + X^2\,|\underline{v}'_l v_l|^2 + 2xX - 2xX\,\operatorname{ctg}(\delta'_l - \delta_l)\operatorname{ctg}(\underline{\delta}'_l - \underline{\delta}_l)} \qquad (11)$$

(12)

$$\sigma_{sp}^{(l)} = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\,\frac{x^2\,|\underline{v}_l v'_l|^2\,\operatorname{sen}^2\delta' + X^2\,|v_l\underline{v}'_l|^2\,\operatorname{sen}^2\delta_l - 2\,x\,X\,\dfrac{\operatorname{sen}\delta'_l\operatorname{sen}\delta_l}{\operatorname{sen}(\delta'_l - \delta_l)}\operatorname{ctg}(\underline{\delta}'_l - \underline{\delta}_l)}{x^2\,|v'_l\underline{v}_l|^2 + X^2\,|\underline{v}'_l v_l|^2 + 2xX - 2xX\,\operatorname{ctg}(\delta'_l - \delta_l)\,\operatorname{ctg}(\underline{\delta}'_l - \underline{\delta}_l)}$$

(13)

$$\sigma_{tot}^{(l)} = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\,\frac{x^2\,|\underline{v}_l v'_l|^2\,\operatorname{sen}^2\delta'_l + X^2\,|v_l\underline{v}'_l|^2\,\operatorname{sen}^2\delta_l + x\,X - 2xX\,\dfrac{\operatorname{sen}\delta'_l\operatorname{sen}\delta_l}{\operatorname{sen}(\delta'_l - \delta_l)}\operatorname{ctg}(\underline{\delta}'_l - \underline{\delta}_l)}{x^2\,|v'_l\underline{v}_l|^2 + X^2\,|\underline{v}'_l v_l|^2 + 2xX - 2xX\,\operatorname{ctg}(\delta'_l - \delta_l)\,\operatorname{ctg}(\underline{\delta}'_l - \underline{\delta}_l)}$$

Per $X \to \infty$, si ha: $|\underline{v}| \to 1$, $|v'| \to 1$, $\underline{\delta}' - \underline{\delta} \to \dfrac{\pi}{2}$, per ogni l e si ricade come previsto, nelle formule di Weisskopf.

3.

Per una valutazione quantitativa delle formule precedenti occorre prima di tutto determinare il numero d'onde K del neutrone incidente all'interno del nucleo. Ciò si può fare nel modo seguente. Se nel volume V sono contenute M particelle che soddisfino la statistica di Fermi e costituiscano un gas completamente degenere, il massimo valore della quantità di moto P_0 di una di tali particelle è dato (come è ben noto) da:

$$P_0 = 2\pi\hbar \left(\frac{3N}{4\pi V}\right)^{1/3}$$

Schematizzando il nucleo atomico investito dalle onde neutroniche con un tale sistema di particelle, dovremo prendere per V il volume nucleare e porre $N = \frac{A}{4}$, essendo A il numero di massa, per tener conto che nel nucleo sono contenute due diverse specie di particelle, per ciascuna delle quali vi sono due possibili orientazioni dello spin. P_0 rappresenterà allora il minimo valore possibile per la quantità di moto di un neutrone aggiunto al nucleo, dato che tutti i possibili livelli inferiori a P_0 sono già occupati da particelle nucleari.

L'energia cinetica minima del neutrone entro il nucleo sarà dunque:

$$\varepsilon_0 = \frac{P_0^2}{2M} = \frac{2\pi^2\hbar^2}{M}\left(\frac{3A}{16\pi V}\right)^{2/3}$$

Questa non sarà però l'energia cinetica effettiva totale ε_{tot} del neutrone: per ottenerla dovremo evidentemente aggiungere ad ε_0 quella parte ε_B dell'energia di legame che rimane al neutrone in forma di energia cinetica e l'energia cinetica ε con cui il neutrone giunge sul nucleo.

Avremo dunque in generale:

$$K^2 = \frac{2M\varepsilon_{tot}}{\hbar^2} = \frac{2M}{\hbar^2}\left[\varepsilon_0 + \varepsilon_B + \varepsilon\right] = k^2 + \frac{2M}{\hbar^2}\varepsilon_B + 4\pi^2\left(\frac{3A}{16\pi V}\right)^{2/3}$$

Weisskopf assume approssimativamente $\varepsilon_B = 0$, d'accordo col fatto che l'energia che si libera nella penetrazione del neutrone nel nu-

cleo va rapidamente suddivisa tra tutte le particelle nucleari e quindi assai poca ne rimane alla particella incidente, nè d'altra parte ne viene sensibilmente alterato il valore di ε_0. Posto allora: $V = 4/3\ \pi\ R^3$, si ha, moltiplicando i due membri per R^2:

$$X^2 = x^2 + \left(\frac{9\pi}{8} A\right)^{2/3} \tag{14}$$

Per ciò che riguarda le autofunzioni che compaiono nelle espressioni delle sezioni d'urto, esse sono le soluzioni dell'equazione radiale di Schrödinger per potenziale zero:

$$\varphi'' + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right) \varphi = 0$$

$\varphi = r\,\psi, \quad x = k\,r$), che hanno per espressione asintotica:

$$v_l \to e^{+i\left(x - l\frac{\pi}{2}\right)}$$

E' quindi come ben noto:

$$v_l = i \left(\frac{\pi x}{2}\right)^{1/2} H^{(1)}_{l+1/2}(x) = \frac{\pi x}{2} \left[(-1)^l J_{-(l+1/2)}(x) + i\ J_{l+1/2}(x)\right] \tag{15}$$

da cui subito:

$$|v_l|^2 = \frac{\pi x}{2} \left[J^2_{l+\frac{1}{2}}(x) + J^2_{-(l+1/2)}(x)\right] \tag{16}$$

$$\operatorname{tg} \delta_l = (-\iota)^l \frac{J_{l+1/2}(x)}{J_{-(l+1/2)}(x)} \tag{17}$$

Derivando la (15) rispetto ad x e tenendo conto delle formule ricorrenti tra funzioni cilindriche, si ha poi:

$$v'_l = \frac{1}{2l+1} \left(\frac{\pi x}{2}\right)^{1/2} \left[(-1)^l \left\{l\ J_{-(l+3/2)}(x) - (l+1)\ J_{-(l-1/2)}(x)\right\} + \right. \tag{18}$$

$$\left. + i \left\{(l+1)\ J_{l-1/2}(x) - l\ J_{l+3/2}(x)\right\}\right]$$

da cui:

$$|v'_l|^2 = \frac{\pi x}{2\,(2l+1)^2}\left\{\left[l\,J_{-(l+3/2)}\,(x) - (l+1)\,J_{-(l-1/2)}\,(x)\right]^2 + \left[(l+1)\,J_{l-1/2}\,(x) - l\,J_{l+3/2}\,(x)\right]^2\right\} \tag{19}$$

$$\operatorname{tg}\,\delta'_l = (-1)^l\,\frac{(l+1)\,J_{l-1/2}\,(x) - l\,J_{l+3/2}\,(x)}{l\,J_{-(l+3/2)}\,(x)\,(l+1)\,J_{-(l-1/2)}\,(x)} \tag{20}$$

Il calcolo numerico è stato eseguito per me dall'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, limitatamente alla sezione d'urto totale (13), nel caso dell'alluminio. E' stato scelto questo elemento perchè per esso si ha il confronto tra dati sperimentali e teoria della trasparenza, fatto da Jastrow ([30]). La figura 3 mette a confronto l'andamento della sezione d'urto totale dell'alluminio secondo la formula (13) e secondo la formula di Weisskopf. Come si vede, il procedimento più coerente porta (come era del resto prevedibile) ad una diminuzione delle sezioni d'urto al crescere dell'energia sensibilmente più lenta di quanto pre-

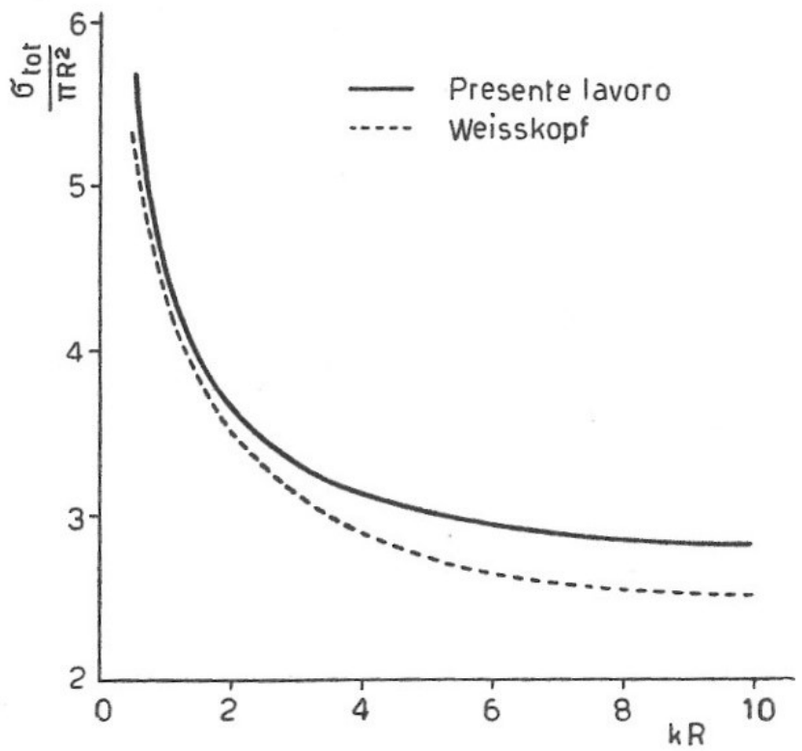

Fig. 3.

Sezione d'urto totale dell'alluminio.

veda la formula di WEISSKOPF. La differenza è tuttavia assai piccola, dell'ordine del 10%.

Sembra quindi di poter senz'altro concludere che non è possibile, neppure impostando il calcolo sulla base di un modello internamente del tutto coerente, render conto dell'andamento sperimentale delle sezioni d'urto nucleari per neutroni in funzione dell'energia semplicemente trattando il nucleo come una sfera completamente assorbente e senza ricorrere ad ipotesi ad hoc, quale ad esempio quella adottata da JASTROW.

E' infine mio gradito dovere ringraziare pubblicamente il prof. M. Picone direttore dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, nonchè il dr. Gros per l'esecuzione dei laboriosi calcoli numerici.

Roma — Istituto Superiore di Sanità - Laboratorio di fisica.