

71. L. MEZZETTI, R. QUERZOLI. — **Sull'analisi statistica dei risultati di misure eseguite con contatori di Geiger.**

Riassunto. — Si espone un metodo per l'analisi statistica dei risultati di misure eseguite con gruppi di contatori di Geiger. Si deriva una formula che dà la probabilità che uno sciame di N particelle, incidendo su un gruppo in n contatori, ne scarichi y (o almeno y).

Résumé. — On expose une méthode pour l'analyse des résultats de mesures exécutées avec des groupes de compteurs de Geiger. On déduit une formule donnant la probabilité qu'un essaim de N particules, incisant sur un groupe de n compteurs, en décharge y (ou du moins y).

Summary. — A method for the statistical treatment of the results of G. M. — counter measurements is given. A formula giving the probability that a shower of N particles discharges y out of n counters is derived.

Zusammenfassung. Es wird eine Methode für die statistische Analyse der Messergebnisse mit Gruppen von Geiger-Zählern angegeben. Weiters wird eine Formel abgeleitet durch welche die Wahrscheinlichkeit ergibt wird dass ein Schwarm von N Teilchen, beim Auftreffen auf eine Gruppe von n Zählern, davon y (oder wenigstens y) entlade.

Per la interpretazione dei risultati di alcune misure, eseguite con contatori di G.M., sugli sciami di particelle generate dai raggi cosmici, ci si è recentemente presentato il problema di valutare la probabilità che uno sciame costituito da un numero N di particelle incidenti su un gruppo di n contatori, predisposti per rivelarle, ne colpisca un certo numero ν ($< n$). Poichè una tale formula non è deducibile a prima vista, e può essere di qualche utilità nella interpretazione di esperienze consimili, la presentiamo nel seguito, insieme con la dimostrazione ed alcune valutazioni numeriche ⁽¹⁾.

Sia p la probabilità che una particella ha di colpire un determinato contatore; assumeremo che tale probabilità sia la stessa per tutte le N particelle incidenti e per tutti gli n contatori. Ciò equivale ovviamente ad assumere che le N particelle incidano con distribuzione casuale entro

⁽¹⁾ Una formula più particolare, relativa al caso $\nu = n$ è stata data da Montgomery, Journ. Frankl. Inst. 221, 59, 1936.

un'area che comprende tutti i contatori, e che questi abbiano tutti la stessa area efficace.

L'espressione

$$S_n(N, \mu) = (1 - \mu p)^N$$

rappresenta allora la probabilità complessiva di tutti gli eventi in cui un *determinato* gruppo di μ contatori non viene colpito da alcuna delle particelle incidenti. Indicheremo invece con $q_n(N, \mu)$ la probabilità di un evento in cui un determinato gruppo di μ contatori non viene colpito da alcuna particella, *mentre sono colpiti tutti i rimanenti* $v = n - \mu$.

Supponiamo ora che un determinato gruppo di k contatori non venga colpito e prendiamo in esame i rimanenti $h = n - k$. Supponiamo che di questi, certi determinati α contatori non siano parimenti colpiti, mentre lo sono i rimanenti $h - \alpha$ ($\alpha = 0, 1, \dots, h$). Scegliendo in tutti i modi possibili il gruppo di α contatori, ed attribuendo ad α tutti i valori di cui è suscettibile, si ottengono evidentemente tutte le modalità, fra loro incompatibili, con cui si può verificare l'evento di probabilità $S_n(N, k)$. Per un dato valore di α la probabilità di una qualsiasi di queste modalità è evidentemente $q_n(N, k + \alpha)$, mentre il loro numero è $\binom{h}{\alpha} = \binom{n-k}{\alpha}$. Si ha pertanto:

$$(1) \quad S_n(N, k) = \sum_{\alpha=0}^{n-k} \binom{n-k}{\alpha} q_n(N, k + \alpha) = \sum_k^n \binom{n-k}{\beta-k} q_n(N, \beta).$$

Moltiplichiamo ora ambo i membri della (1) per $(-1)^{\mu-k} \binom{n-\mu}{k-\mu}$ e sommiamo su tutti i valori di k fra μ ed n :

$$\sum_{\mu}^n (-1)^{\mu-k} \binom{n-\mu}{k-\mu} S_n(N, k) = \sum_{\mu}^n (-1)^{\mu-k} \binom{n-\mu}{k-\mu} \sum_k^n \binom{n-k}{\beta-k} q_n(N, \beta)$$

Invertendo a secondo membro l'ordine delle sommatorie, ed osservando che è:

$$\binom{n-\mu}{k-\mu} \binom{n-k}{\beta-k} = \binom{\beta-\mu}{k-\mu} \binom{n-\mu}{\beta-\mu}$$

si ottiene:

$$\sum_{\mu}^n (-1)^{\mu-k} \binom{n-\mu}{k-\mu} S_n(N, k) = \sum_{\mu}^n \binom{n-\mu}{\beta-\mu} q_n(N, \beta) \sum_{\mu}^{\beta} (-1)^{\mu-k} \binom{\beta-\mu}{k-\mu}$$

La seconda sommatoria a secondo membro non è altro che lo sviluppo di $(1-1)^{\beta-\mu}$ ed è quindi sempre uguale a zero tranne che per $\beta = \mu$, per cui vale 1; la (2) si riduce perciò alla:

$$(3) \quad q_n(N, \mu) = \sum_{\mu}^n (-1)^{\mu-k} \binom{n-\mu}{k-\mu} S_n(N, k).$$

La formula (3) permette di scrivere immediatamente la probabilità cercata. Indicando questa con $P_n(N, \nu)$ è infatti evidentemente:

$$P_n(N, \nu) = \binom{n}{\nu} q_n(N, \mu),$$

che si può scrivere, in forma adatta per il calcolo numerico:

$$(4) \quad P_n(N, \nu) = \binom{n}{\nu} \sum_0^{\nu} (-1)^h \binom{\nu}{h} \left[1 - (1 - \nu + h) p \right]^N$$

Per $\nu = n$ la (4) si riduce alla formula data da MONTGOMERY e MONTGOMERY (1). Si riconosce immediatamente che la $P_n(N, \nu)$ si annulla per $\nu > n$; si può inoltre dimostrare che essa si annulla anche, per ogni valore di n e di p , per $N < \nu$.

In certi casi può essere più comodo calcolare direttamente, anziché la $P_n(N, \nu)$, la probabilità $\bar{P}_n(N, \nu)$ che «almeno ν » (cioè ν o più di ν) degli n contatori sono colpiti. Essa si ottiene evidentemente facendo la somma

$$(5) \quad \bar{P}_n(N, \nu) = \sum_{\nu}^n P_n(N, k)$$

La doppia sommatoria che compare nella (5) si può semplificare, sfruttando note relazioni fra i simboli combinatori, e si ottiene, in una forma comoda per il calcolo numerico

$$(6) \quad \bar{P}_n(N, \nu) = 1 - \sum_0^{\nu-1} (-1)^h \binom{\mu+h}{\mu} \binom{n}{\mu+h+1} \left[1 - (\mu+h+1) p \right]^N$$

dove $\mu = n - \nu$.

Sia ora $f(N)$ la frequenza degli sciami incidenti contenenti N particelle. La frequenza degli eventi in cui ν degli n contatori, oppure

«almeno v » di essi sono colpiti (cioè, in una esperienza eseguita con contatori, le frequenze sperimentali) saranno rispettivamente

$$(7^a) \quad \varphi(v) = \sum_N^{\infty} f(N) P_n(N, v) \quad v = 1, 2, \dots, n$$

$$(7^b) \quad \bar{\varphi}(v) = \sum_N^{\infty} f(N) \bar{P}_n(N, v)$$

Se ci si propone di risalire dalle frequenze sperimentali alle frequenze $f(N)$, le (7) costituiscono un sistema di n equazioni con le infinite incognite $f(N)$; il problema è quindi insolubile se non si pongono altre condizioni, quali per esempio una limitazione per il numero massimo ammissibile di particelle costituenti uno sciame, o qualche ipotesi sulla forma della funzione $f(N)$, per lo meno per i valori $N > n$. In questo ultimo caso il problema è evidentemente suscettibile di trattazione numerica approssimata, con un metodo di approssimazioni successive.

Un caso particolare molto facile a trattare si ottiene se si assume che la distribuzione $f(N)$ sia poissoniana, intorno ad un numero medio M . Tenendo conto del fatto che la $P(N, v)$ è identicamente nulla per ogni $N < v$ si può infatti scrivere:

$$\varphi(v) = \sum_N^{\infty} e^{-M} \frac{M^N}{N!} P_n(N, v)$$

Invertendo la sommatoria rispetto ad N con quella che compare nella espressione di $P_n(N, v)$ si ottiene:

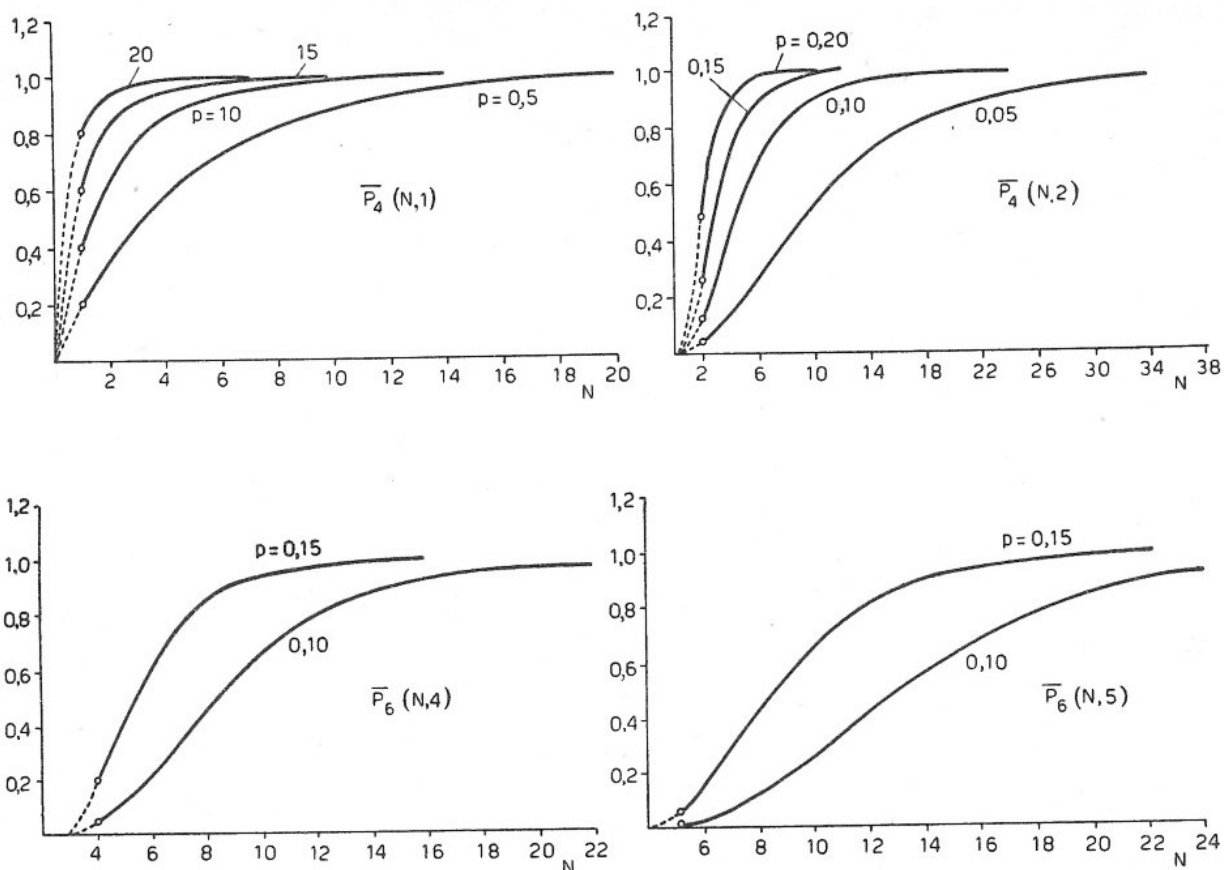
$$\varphi(v) = e^{-M} \binom{n}{v} \sum_h^v (-1)^h \binom{v}{h} \sum_N^{\infty} \frac{M^N}{N!} \left[1 - (n - v + h)p \right]^N$$

da cui, non facili semplificazioni,

$$(8) \quad \varphi(v) = \binom{n}{v} e^{-(n-v)Mp} \left(1 - e^{-Mp} \right)^v$$

Si osservi che la (8) coincide, come deve, con la formula che esprime la probabilità che v contatori, su n , siano colpiti quando sul gruppo coincide uno sciame esteso di densità media $\Delta = Mp/S$.

A titolo di esempio riportiamo qui di seguito il diagramma della $P_n(N, v)$ per alcuni valori di n, v e del parametro p .



APPENDICE

I. $P_n(N, v) \equiv 0$ per $N < v$

Sviluppando la potenza $[1-(n-v+h)p]^N$ la (4) diventa, dopo inversione dell'ordine delle sommatorie

$$(9) \quad P_n(N, v) = \binom{n}{v} \sum_0^N (-1)^j \binom{N}{j} p^j \sum_0^v (-1)^h \binom{v}{h} (n-v+h)^j$$

Se $N < v$, anche $j < v$. Ora si può dimostrare facilmente che è:

$$(10) \quad \sum_0^v (-1)^h \binom{v}{h} (\mu+h)^j \equiv 0 \quad \text{per } j = 0, 1, 2, \dots, v$$

con il che l'asserto è dimostrato. Per dimostrare la (10) basta osservare che si può scrivere:

$$(\mu+h)^j = \left[D^{(j)} e^{(\mu+h)x} \right]_{x=0}$$

dove $D^{(j)}$ indica derivazione d'ordine j rispetto ad x . La (10) diventa allora:

$$\left[D^{(j)} \sum_0^v (-1)^h \binom{v}{h} e^{(\mu+h)x} \right]_{x=0} = \left[D^{(j)} e^{\mu x} (1-e^x)^v \right]_{x=0}$$

Ora tutte le derivate, fino all'ordine $v-1$, dell'espressione $e^{\mu x} (1-e^x)^v$ contengono un fattore $(1-e^x)^\alpha$, con $\alpha = v, v-1, \dots, 1$, che si annulla per $x=0$; il che prova l'asserto.

II. Dimostrazione della (6).

Per la (4) e la (5) è:

$$\bar{P}_n(N, v) = \sum_0^{n-v} \binom{n}{k} \sum_0^k (-1)^{n-k-j} \binom{k}{j} \left[1 - (n-j)p \right]^N.$$

Invertendo l'ordine delle sommatorie si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{P}_n(N, v) &= \sum_0^{v-1} (-1)^{n-j} \left[1 - (n-j)p \right]^N \binom{n}{j} \sum_0^{n-v} (-1)^k \binom{n-j}{k} \\ &+ \sum_v^n (-1)^{n-j} \left[1 - (n-j)p \right]^N \binom{n}{j} \sum_0^{n-j} (-1)^k \binom{n-j}{k} \end{aligned}$$

Si verifica immediatamente che il secondo termine vale 1 perchè la sommatoria rispetto a k si annulla identicamente per ogni j tranne per $j=n$, per cui vale 1. Per valutare il primo termine basta osservare che

$$\sum_0^{n-v} (-1)^k \binom{n-j}{k} = 1 + \sum_v^{n-v} (-1)^k \left[\binom{n-j-1}{k-1} + \binom{n-j-1}{k} \right]$$

e che ogni termine della sommatoria a secondo membro si elide per metà con il precedente e per metà col successivo, tranne il primo e l'ultimo che danno

$$\sum_0^{n-v} (-1)^k \binom{n-j}{k} = 1 + \left[-1 + (-1)^{n-v} \binom{n-j-1}{n-v} \right] = (-1)^{n-v} \binom{n-j-1}{n-v}.$$

Si ottiene perciò:

$$(11) \quad \bar{P}_n(N, \nu) = 1 + \sum_{j=0}^{\nu-1} (-1)^{2n-\nu-j} \binom{n}{j} \binom{n-j-1}{n-\nu} \left[1 - (n-j)p \right]^N.$$

La (11), come si riconosce immediatamente, coincide con la (6).

Roma - Istituto Superiore di Sanità - Laboratorio di fisica e Istituto di Fisica dell'Università.
