

2. Mario AGENO. — I problemi con massa variabile nella dinamica classica.

Riassunto. — Si discutono in generale i problemi dinamici con massa variabile, dal punto di vista della schematizzazione tipo punto materiale. Si chiarisce il significato fisico delle formule corrette e si portano alcuni esempi.

Résumé. — On discute en général les problèmes dynamiques avec masse variable, du point de vue de la schématisation type point matériel. On éclaireit la signification physique des formules correctes et on cite quelques exemples.

Summary. — General considerations concerning dynamic problems with variable mass, from the point of view of mass point schematization. An elucidation of the physical significance of correct formulas and some examples.

Zusammenfassung. - Es werden im allgemeinen die Probleme der Dynamik mit veränderlicher Masse besprochen, vom Standpunkte der Massen - Punkt Schematisierung. Es wird die physikalische Bedeutung der berichtigten Formeln erklärt; sodann werden einige Beispiele angegeben.

Uno dei più potenti metodi per la risoluzione di problemi dinamici consiste, com'è noto, nell'adottare una schematizzazione che permetta l'impiego di formule e metodi della dinamica del punto. Quando ciò è possibile (o conveniente), tutto si riduce quindi ad un'applicazione più o meno diretta del secondo principio. Non si deve però dimenticare che i problemi dinamici concreti che ci troviamo di fronte sono in realtà *sempre* problemi di dinamica dei sistemi e che di conseguenza l'applicazione ad essi del secondo principio rappresenta *sempre* un'approssimazione la cui validità va discussa.

V'è una grossa categoria di problemi, generalmente lasciati un po' in ombra nelle classiche trattazioni della meccanica, [1] per i quali non è possibile una schematizzazione che riduca la soluzione ad una diretta applicazione del secondo principio. Sono i cosiddetti problemi con massa

(1) Si veda per es. A. SOMMERFELD « Vorlesungen über theoretischen Physik, Band I, Mechanik », Akad. Verlag., Leipzig, 1943, pag. 28-31.

variabile, dei quali credo possa metter conto fare una trattazione che metta in rilievo il significato fisico delle formule. Ritengo di fare con ciò cosa non del tutto inutile, poichè le trattazioni sommarie dei testi classici sono insufficienti a chiarire perchè procedimenti a prima vista ovvii portino in realtà a risultati sbagliati.

1. — Come va intesa la variabilità della massa.

Occorre dire innanzi tutto che cosa propriamente si intenda per variabilità della massa in questa categoria di problemi.

Diciamo subito esplicitamente che tale variabilità non ha nulla a che fare con una variabilità intrinseca del coefficiente d'inerzia quale si ha per esempio (in funzione della velocità) nella meccanica relativistica. Si tratta di problemi completamente diversi, che sono generalmente del tipo seguente.

Si abbiano due sistemi distinti, costituiti ciascuno da un grandissimo numero di punti materiali. I punti del primo sistema S_1 siano tutti animati dalla stessa velocità e procedano di conserva. Quelli del secondo sistema S_2 abbiano invece una velocità generalmente diversa da quella dei punti di S_1 e non necessariamente uguale tra loro. Si supponga inoltre che dei punti materiali passino continuamente nel corso del moto, da un sistema all'altro: si aggregino cioè o si distacchino continuamente da S_1 , portando naturalmente con loro una determinata frazione dell'impulso e dell'energia del sistema totale. Il problema consiste nel determinare il movimento del sistema S_1 .

La prima schematizzazione che si presenta alla mente, per risolvere un problema di questo tipo, consiste nel trattare il sistema S_1 nel suo complesso come un unico punto materiale, nel quale sia concentrata la massa totale del sistema stesso e, note che siano le forze agenti, applicare ad esso direttamente il secondo principio della dinamica (o alcuni dei teoremi che da esso derivano). Siccome però al sistema S_1 si aggregano o vengono sottratti continuamente dei punti materiali, così la massa del punto fittizio S_1 non potrà essere considerata costante ma dovrà assumersi variabile nel corso del moto.

Si può pensare che, per girare questa difficoltà della variabilità della massa, sia sufficiente scrivere il secondo principio per il punto fittizio S_1 nella forma originaria di Newton:

$$\frac{d(m \vec{v})}{dt} = \vec{f} \quad (1)$$

uguagliando cioè alla forza agente la derivata rispetto al tempo della quantità di moto. Senonchè, come vedremo nel seguito, la schematizzazione rappresentata dalla (1) non è in generale corretta: l'applicazione dei metodi della dinamica dei sistemi porta a scrivere per il punto fittizio un'equazione che differisce dalla (1) per un termine generalmente differente da zero.

E' dunque propriamente la terza legge della dinamica, non solo la seconda, che porta alla soluzione dei problemi con massa variabile. Se si tenta la schematizzazione tipo punto materiale, non si può imporre che questo segua le leggi ordinarie della dinamica del punto: a queste bisogna in tal caso apportare una correzione, consistente nell'aggiunta di termini che possono anche, come vedremo, interpretarsi come forze.

2. — Il bilancio della quantità di moto.

Per renderci conto che la (1) è sbagliata e per vedere come vada corretta, scriviamola nella forma:

$$m \vec{dv} + \vec{v} dm = \vec{f} dt \quad (1')$$

e osserviamo qual'è il significato fisico dei vari termini. Il primo termine rappresenta, com'è ovvio, l'aumento della quantità di moto della massa totale m del sistema, quando la sua velocità passa dal valore \vec{v} al valore $\vec{v} + d\vec{v}$. Nel secondo termine, dm rappresenta la massa che nell'intervallo di tempo dt passa dal sistema S_2 al sistema S_1 e $\vec{v} dm$ è la quantità di moto *totale* di questa massa. Infine, il termine a secondo membro è l'impulso della forza \vec{f} applicata, nel tempo dt .

Sarà evidentemente lecito imputare i due incrementi della quantità di moto di S_1 , rappresentati dai due termini a primo membro, integralmente all'azione della forza \vec{f} applicata, solo nel caso assai particolare in cui dm abbia, prima di aggregarsi a S_2 , velocità uguale a zero. Nel caso generale, la \vec{f} sarà responsabile solo della variazione che la quantità di moto della massa dm subisce, nel mentre che questa passa da S_2 ad S_1 . Se quindi indichiamo con \vec{w} la velocità della dm prima ch'essa si aggregi al sistema S_1 (o dopo ch'essa si è distaccata da S_1 se dm è negativo), la forma corretta della (1) sarà evidentemente:

$$m \vec{dv} + (\vec{v} - \vec{w}) dm = \vec{f} dt \quad (2)$$

Nella (1) deve in altre parole comparire la *velocità relativa* delle due masse m e dm prima della loro unione o dopo il loro distacco.

Com'è chiaro, la (2) non contiene solo il secondo principio della dinamica, bensì anche il terzo, conservazione della quantità di moto, applicato all'intero sistema $S_1 + S_2$. Uguagliando la quantità di moto totale prima che dm si aggregi a S_1 e dopo, si ha infatti:

$$m\vec{v} + \vec{w} dm + \vec{f} dt = (m + dm) (\vec{v} + d\vec{v}) \quad (2')$$

da cui subito la (2).

3. — Il teorema delle forze vive.

La più importante conseguenza della non validità della (1) è che per il punto materiale fittizio S_1 non vale in generale il teorema delle forze vive nella sua forma usuale.

Per vederlo, incominciamo con lo scrivere la variazione subita dalla energia cinetica del sistema S_1 in un intervallino di tempo infinitesimo, dt . Essa è evidentemente:

$$dW = \frac{1}{2} (m + dm) (\vec{v} + d\vec{v})^2 - \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = m \vec{v} d\vec{v} + \frac{1}{2} \vec{v}^2 dm \quad (3)$$

Il significato fisico dei due termini che compaiono all'ultimo membro della (3) è ovvia: il primo rappresenta l'incremento dell'energia cinetica della massa m , nel mentre che la sua velocità passa dal valore \vec{v} al valore $(\vec{v} + d\vec{v})$; il secondo rappresenta invece l'energia cinetica *totale* della massa dm , che nel tempo dt si aggrega al sistema. Di quest'ultima, solo una parte, e precisamente:

$$\frac{1}{2} \vec{v}^2 dm - \frac{1}{2} \vec{w}^2 dm$$

sarà da imputarsi all'azione della forza agente \vec{f} , poichè la parte restante, $\frac{1}{2} \vec{w}^2 dm$, era già posseduta dalla massa dm prima che questa si aggregasse ad S_1 .

Parrebbe dunque che il teorema delle forze vive andasse scritto:

$$dW - \frac{1}{2} \vec{w}^2 dm = m \vec{v} d\vec{v} + \frac{1}{2} (\vec{v}^2 - \vec{w}^2) dm = dl \quad (4)$$

essendo dl il lavoro elementare della forza \vec{f} applicata, nell'intervallo di tempo dt .

E' facile vedere che questa relazione (4) è inesatta. Dalla (2) (che è esatta) infatti moltiplicando scalarmente per \vec{v} , si ottiene:

$$m \vec{v} \cdot d\vec{v} + (\vec{v}^2 - \vec{w}\vec{v}) dm = dl \quad (5)$$

che può anche scriversi:

$$dW = \frac{1}{2} \vec{w}^2 dm + \frac{1}{2} (\vec{v} - \vec{w})^2 dm = dl \quad (5')$$

relazione questa che differisce dalla (4) per il termine aggiuntivo: $\frac{1}{2} (\vec{v} - \vec{w})^2 dm$. Si tratta ora di capire il significato fisico di tale termine.

Osserviamo innanzi tutto che se dm è positivo (massa crescente) esso corrisponde ad una dissipazione di energia e se dm è negativo (massa decrescente) esso corrisponde invece alla comparsa di una certa quantità di energia cinetica, che non è da imputarsi al lavoro delle forze esterne.

D'altra parte (supponendo per ora dm positivo) la velocità della massa dm che nel tempuscolo dt viene aggregata ad S_1 , varia in tale intervallino infinitesimo della quantità finita $\vec{v} - \vec{w}$, dopo di che la massa in questione prosegue assieme alla massa m restante del sistema S_1 .

Dal punto di vista fisico, dunque, il fenomeno è sostanzialmente assimilabile ad un *urto totalmente anelastico* tra le due masse dm e m , urto che, com'è noto, avviene sempre con dissipazione di energia. Allora, nel caso di massa crescente, il termine aggiuntivo rappresenterà proprio l'energia dissipata in tale urto anelastico.

Per vederlo consideriamo l'urto anelastico tra una massa m avente la velocità \vec{v} e una massa dm avente la velocità \vec{w} . La velocità dopo l'urto sia \vec{V} : essa differirà naturalmente infinitamente poco da \vec{v} , essendo dm infinitesima. Il terzo principio fornisce in tal caso:

$$m\vec{v} + \vec{w} \cdot dm = \vec{V} (m + dm) \quad (6)$$

La perdita dE di energia cinetica nell'urto anelastico sarà perciò data da:

$$\begin{aligned} dE &= \frac{1}{2} m\vec{v}^2 + \frac{1}{2} \vec{w}^2 dm - \frac{1}{2} (m + dm) V^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{w}^2 dm - \frac{1}{2 (m + dm)} (m \vec{v} + \vec{w} dm)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

ossia semplificando e trascurando i termini infinitesimi di ordine superiore al primo:

$$dE = \frac{1}{2} (\vec{v} - \vec{w})^2 dm \quad (7'')$$

come appunto si voleva dimostrare. Naturalmente, nel caso ora considerato, l'energia necessaria ad accelerare la massa dm da \vec{w} a \vec{v} e l'energia dissipata dE sono fornite esclusivamente dall'energia cinetica della massa m , la quale passa di conseguenza dalla velocità \vec{v} alla velocità \vec{V} . Nel caso della (5) invece tale energia è fornita dal lavoro delle forze esterne.

Nel caso di dm negativo (massa decrescente) l'interpretazione fisica è del tutto analoga. Senonchè il fenomeno è ora assimilabile non già ad urto anelastico, ma ad un'esplosione. Il termine:

$$- \frac{1}{2} (\vec{v} - \vec{w})^2 dm$$

rappresenta in tal caso l'energia liberata nell'esplosione e che si trasforma in energia cinetica dei due frammenti.

4. La schematizzazione tipo punto materiale.

Riscriviamo dunque le due equazioni corrette, quella esprime il bilancio della quantità di moto:

$$d(m\vec{v}) = \vec{f} dt + \vec{w} dm \quad (2)$$

e quella esprime il bilancio dell'energia:

$$d(\frac{1}{2} m\vec{v}^2) = dl + \frac{1}{2} \vec{w}^2 dm - \frac{1}{2} (\vec{v} - \vec{w})^2 dm \quad (5'')$$

La prima dice che l'aumento della quantità di moto di S_1 è uguale all'impulso della forza esterna aumentato della quantità di moto della massa aggregatasi. La seconda dice che l'aumento dell'energia cinetica del sistema S_1 è uguale alla somma del lavoro delle forze esterne e dell'energia cinetica della massa aggregatasi, diminuita dell'energia dissipata nell'urto anelastico.

Risulta così chiaro entro quali limiti si possa ancora parlare di schematizzazione tipo punto materiale, per i sistemi con massa variabile. Se la trattazione del problema dinamico s'impone nella (2), si può convenire ch'essa rappresenta il secondo principio della dinamica, ma allora occorre mettere in conto una forza (dissipativa) $\vec{w} \frac{dm}{dt}$ dovuta all'urto degli elementi di massa che si aggregano via via ad S_1 . Se la trattazione s'impone invece nella (5''), si può pure convenire ch'essa rappresenti il teorema delle forze vive, ma allora occorre mettere in conto una forza (dissipativa) $\frac{1}{2} \vec{w}^2 \frac{dm}{ds}$ dovuta, come prima, all'urto degli elementi di massa aggregantisi ed una resistenza (anch'essa dissipativa) $-\frac{1}{2} (\vec{v} - \vec{w})^2 \frac{dm}{ds}$ dovuta al carattere anelastico degli urti.

In realtà, come sempre avviene, è il terzo (e non il secondo principio) che porta a scrivere l'equazione del moto del sistema in istudio. Solo che in questo caso non sono in generale valide quelle approssimazioni che assai spesso rendono l'equazione stessa formalmente identica al secondo principio, scritto per un singolo punto.

Vi sono naturalmente anche casi in cui la distribuzione della velocità tra i punti materiali del sistema S_2 è tale che i termini correttivi risultano nulli e di conseguenza la schematizzazione tipo punto materiale unico è ancora valida. Rimandiamo a questo proposito a due classiche memorie del T. LEVI CIVITA [2-3] e agli altri lavori citati nella bibliografia, tutti relativi a casi d'interesse astronomico [4-9]. La discussione di tale argomento esce comunque, dai limiti, assai modesti, che ci siamo prefissi.

5. — Alcuni esempi.

Vogliamo concludere e chiarire ulteriormente le considerazioni generali precedenti con un paio di esempi.

Come primo esempio, consideriamo il seguente problema assai noto:

(2) Rend. Acc. Lincei VIII, 329, 1928.

(3) Rend. Acc. Lincei VIII, 621, 1928.

(4) E. FERMI: Rend. Acc. Lincei IX, 984, 1929.

(5) F. ZAGAR: Rend. Acc. Lincei XVI, 627, 1932.

(6) F. ZAGAR: Rend. Acc. Lincei XVII, 88, 1933.

(7) D. GRAFFI: Rend. Acc. Lincei XXI, 438, 1935.

(8) D. GRAFFI: Rend. Acc. Lincei XXII, 55, 1935.

(9) Per il problema più particolarmente d'interesse astronomico si vedano le numerosissime memorie dell'ARMELLINI (Mem. Soc. It. dei XL - vol. 19 - pag. 75-96, 1916, e Rend. Acc. Lincei dal 1911 al 1937).

« Un filo omogeneo, flessibile ed inestensibile, di densità lineare λ costante, poggia sulla gola di una carrucola mobile senza attrito e di massa trascurabile. Da un lato, il filo pende liberamente sotto l'azione della gravità, mentre dal lato opposto una parte di esso è ammucchiata su di un piano orizzontale, dal quale può per altro staccarsi senza attrito. Supposto che il sistema sia inizialmente fermo e che l'estremo libero del filo si trovi ad un livello più basso per un tratto h di quello del piano di appoggio, si determini la velocità di scorrimento del filo in funzione della quota dell'estremo libero di esso ».

Questo problema non viene generalmente trattato come problema con massa variabile. Si introducono ^[10] di solito come grandezze ausiliarie le tensioni del filo nei punti B, C, D, (fig. 1) e si scrivono separatamente le equazioni del moto per i tratti AB, BC, CD e per il trattino dx infinitesimo che si solleva dal piano d'appoggio nel tempuscolo dt . Si ha così:

1) per il tratto AB (II principio della dinamica):

$$\lambda \left(x + \frac{l - \pi R}{2} \right) \frac{dv}{dt} = g \lambda \left(x + \frac{l - \pi R}{2} \right) - T_B$$

dove l è la lunghezza complessiva del tratto di filo a cavallo della carrucola e al di sopra del piano di appoggio (D C B E) e le altre grandezze hanno il significato già detto o indicato nella fig. 1.

2) per il tratto BC: (II equaz. cardinale del moto):

$$\pi R l \cdot R^2 \cdot \frac{v}{R} = (T_B - T_c) R$$

ossia:

$$\pi \lambda R \frac{dv}{dt} = T_B - T_c$$

3) per il tratto CD (II principio della dinamica):

$$\lambda \frac{l - R}{2} \frac{dv}{dt} = T_c - T_D - g \lambda \frac{l - \pi R}{2}$$

4) per il trattino infinitesimi dx che si solleva dal piano di appoggio nel tempo dt (teorema dell'impulso):

$$T_D dt = \lambda dx \cdot v$$

essendo trascurabili, perchè infinitesimi, il peso e la reazione dell'appoggio

⁽¹⁰⁾ Si veda una trattazione schematica in: T. LEVI CIVITA e U. AMALDI: « Lezioni di meccanica razionale » vol. II parte I, Zanichelli, Bologna 1926, pag. 421-23.

su dx , e non contribuendo alla variazione della quantità di moto la reazione della porzione di filo ancora appoggiato, perchè orizzontale.

Eliminando tra queste quattro relazioni, le tre grandezze ausiliarie T_B , T_C , T_D , si giunge all'equazione del movimento:

$$(1 + x)v \frac{dv}{dx} + v^2 = gx$$

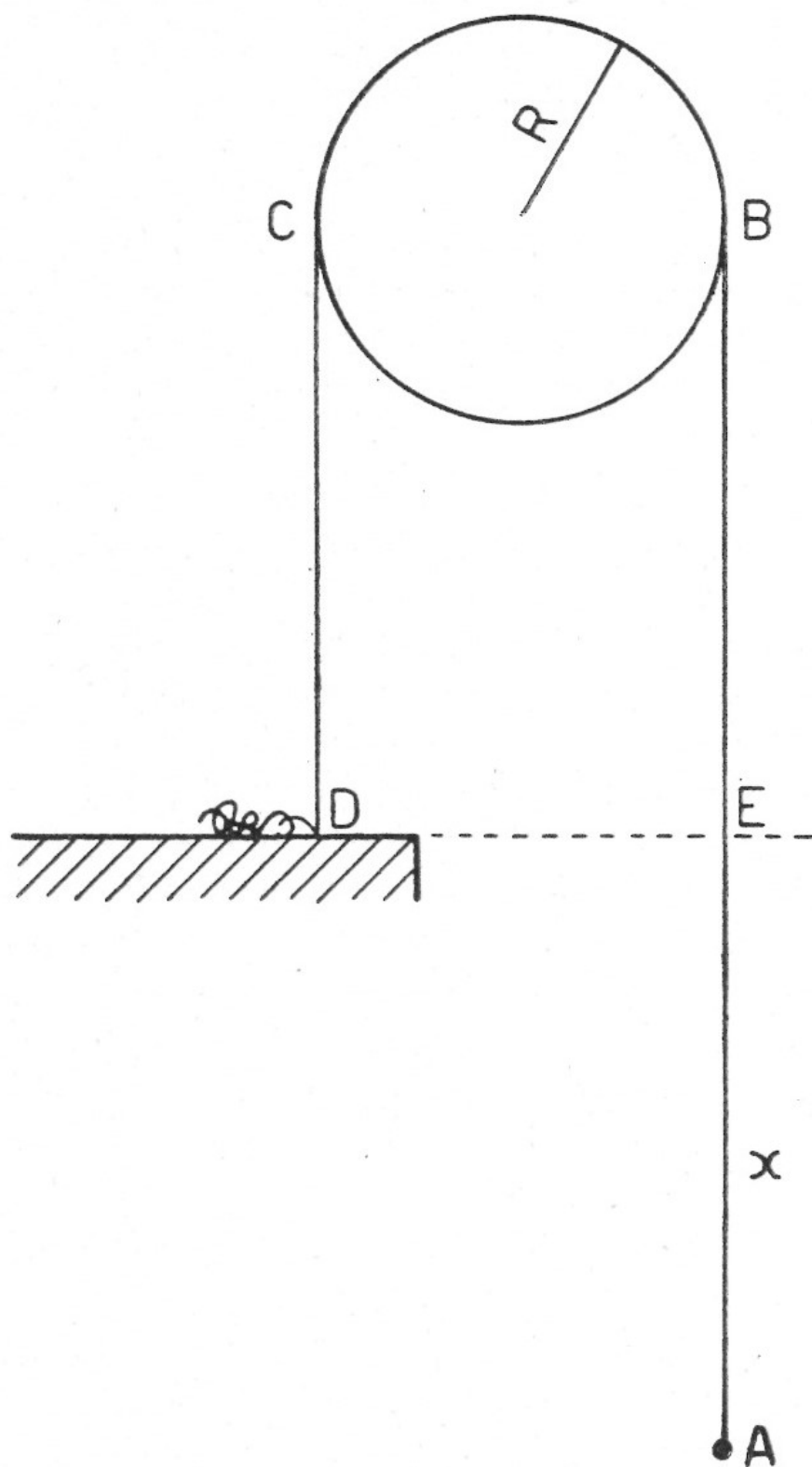


Fig. 1

Filo pesante scorrevole su di una carrucola (problema n. 1)

Una trattazione più semplice ed elegante si ha [11] considerando il problema (com'è in realtà) un problema con massa variabile ed impostando il bilancio dell'energia, secondo la (5).

Le forze esterne dipendono in questo caso da un potenziale. Il lavoro elementare dl non è quindi altro che la perdita di energia potenziale per uno scorrimento infinitesimo del filo, dx . Tale scorrimento equivale, per ciò che riguarda l'energia potenziale, al trasferimento di una massa $dm = \lambda dx$ dal piano di appoggio al livello dell'estremo libero del filo. La reazione della parte del filo ancora appoggiata sull'elementino dx non lavora, perchè perpendicolare allo spostamento. Si ha quindi:

$$dl = g \lambda dx \cdot x$$

E' inoltre $\vec{w} = 0$, per cui:

$$\frac{1}{2} \vec{w}^2 dm = 0 \qquad -\frac{1}{2} (\vec{v} - \vec{w})^2 dm = -\frac{1}{2} \lambda v^2 dx$$

La (5) è dunque ora:

$$\begin{aligned} d(\frac{1}{2}mv^2) &= m v dv + \frac{1}{2} v^2 dm = \lambda (1 + x)v dv + \frac{1}{2} \lambda v^2 dx = \\ &= g \lambda x dx - \frac{1}{2} \lambda v^2 dx \end{aligned}$$

da cui subito l'equazione del moto nella forma già scritta.

Come secondo esempio, trattiamo il caso [12] di un vagone ferroviario che si muova con velocità istantanea v su rotaie piane e rettilinee, in condizioni tali che l'attrito sia trascurabile. Immaginiamo che su di esso cada la pioggia (in assenza di vento e perciò verticale) e precisamente una massa μ d'acqua per unità di tempo. Supponiamo inoltre che tale massa d'acqua non rimanga sul vagone, ma cada interamente al suolo, attraverso un foro praticato nel fondo. Come varia col tempo la velocità del vagone?

La massa di esso, sia m , è dunque costante. Il problema è però in realtà un problema con massa variabile, in quanto il sistema di cui si considera il moto (vagone) per ogni unità di tempo acquista una massa μ d'acqua che ha velocità nulla nel senso del moto e ne perde una uguale che ha però velocità nel senso del moto uguale a quella del vagone.

Anche in questo caso bisogna mettere in conto l'energia dissipata nell'urto anelastico tra l'acqua che cade e il vagone in movimento. Inoltre bisognerà tener conto separatamente delle due cause concomitanti di varia-

(11) AGENO M.: Esercizi e problemi di fisica, II ed., Libreria ed. V. Veschi, Roma 1948, pag. 354-357.

(12) AGENO M.: l. c., pag. 358-359.

zione della massa: acquisto della massa μdt d'acqua nel tempo dt , e perdita di una egual quantità nello stesso tempo. La (5) andrà dunque scritta (se con w si indica la velocità, costante e verticale, di caduta delle gocce di pioggia):

$$d \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} w^2 dt - \frac{1}{2} (\vec{v} - \vec{w})^2 dt - \frac{1}{2} v^2 dt + \frac{1}{2} (\vec{v} - \vec{v})^2 dt$$

da cui, ricordando che \vec{v} e \vec{w} sono tra di loro perpendicolari e che $\frac{dm}{dt} = 0$:

$$m \frac{dv}{dt} + v \mu = 0$$

equazione che si poteva anche ottenere direttamente, scrivendo la conservazione della componente orizzontale della quantità di moto.

Roma - Istituto Superiore di Sanità - Laboratorio di Fisica - 8 ottobre 1951.
