

4. Karl BERKELMAN. — Analisi fenomenologica della diffusione di fotoni da protoni.

Riassunto. — Recenti dati sperimentali sulla diffusione elastica Compton da protone ad energie oltre 300 MeV suggeriscono un ampliamento dei precedenti calcoli fenomenologici. Il presente calcolo prende in considerazione la diffusione Thompson e la diffusione tramite il momento magnetico, l'eccitazione dei primi due stati isobarici del sistema pione-nucleone, la diffusione nello stato di dipolo elettrico da parte della corrente del pione carico virtuale, e il « diagramma di Low » che dipende dalla vita media del π^0 . I risultati sono in accordo qualitativo con i dati a bassa energia e con precedenti lavori teorici, ma mostrano un notevole disaccordo con i dati ottenuti sopra 300 MeV. Attorno a 700 MeV è possibile determinare la vita media del π^0 .

Summary. — Recent experimental data on Compton scattering by the proton at energies above 300 MeV suggest an extension of previous phenomenological calculations. The present calculation takes into account the Thompson and magnetic moment scattering, the excitation of the first two pion-nucleon isobar states, the electric dipole scattering from the virtual charged pion current, and the « Low diagram » dependent on the π^0 mean life. The results are in qualitative agreement with the low-energy data and previous theoretical work, but show significant disagreement with the data above 300 MeV. Around 700 MeV there is a possibility of making a determination of the π^0 mean life.

INTRODUZIONE

Nel limite delle basse energie la diffusione della radiazione elettromagnetica da protoni può essere trattata nello stesso modo della diffusione Compton della radiazione da elettroni e la sezione d'urto ad energia prossima a zero è ottenuta semplicemente sostituendo la massa dell'elettrone con la massa del protone nella formula classica della diffusione Thompson. Ad energie più elevate la diffusione γp diventa un processo molto più complicato, dovuto all'eccitazione di stati intermedi

del sistema pione-nucleone, o in altre parole, alla diffusione Rayleigh, a causa della polarizzabilità dinamica del protone e della sua nuvola pionica.

I metodi teorici per trattare la diffusione γp sono sostanzialmente due. Si può costruire un modello fenomenologico in cui l'ampiezza di ciascun multipolo è determinata in funzione dell'energia, mediante una teoria perturbativa nel caso di effetti elettromagnetici diretti, ovvero dai dati della fotoproduzione di pioni, nel caso di contributi di pioni nello stato intermedio. La sezione d'urto differenziale è immediatamente derivata dalla composizione di questi termini di multipolo.

L'altro metodo consiste nell'applicazione delle relazioni di dispersione. Mediante il teorema ottico che stabilisce una relazione tra la parte reale dell'ampiezza di diffusione in avanti $F(k)$ e un'integrale sopra la parte immaginaria e la ben nota relazione $\text{Im } F(k) = \frac{k}{4\pi} \sigma_{\text{tot}}(k)$, si

può determinare $F(k)$ dalla sezione d'urto totale γp . Poiché la sezione d'urto è quasi completamente quella di fotoproduzione di pioni (*), la diffusione in avanti è data direttamente in termini della sezione d'urto di fotoproduzione. La trattazione può poi essere estesa ad altri angoli considerando le ampiezze di multipolo individuali.

Nel presente lavoro seguiremo la via fenomenologica. Questo metodo è stato già seguito da molti Autori (¹⁻⁵) con maggiore o minore complessità, ma in ogni caso la massima energia del fotone (nel sistema del laboratorio) considerata era circa 300 MeV. Recenti esperimenti con i sincrotroni di Cornell e di Frascati (⁶⁻⁷) nella regione di energie da 300 a 800 MeV suggeriscono di estendere l'analisi ad energie più elevate. Si osservi, tuttavia, che i risultati di una teoria fenomenologica della diffusione basata sui dati di assorbimento ad energie elevate non vanno presi troppo seriamente, poiché le nostre conoscenze sui processi di fotoproduzione di pioni non sono così complete come nella regione di energie sotto 300 MeV.

Si può sperare di imparare qualche cosa dal confronto dell'ordine di grandezza dei risultati di un tale calcolo con i dati recenti sulla diffusione.

(*) L'assorbimento γp che dà luogo alla produzione di coppie di elettroni-positroni è associato con la diffusione Delbruck, che è apprezzabile soltanto ad angoli molto piccoli. Trascureremo tale effetto nella presente analisi.

ANALISI IN TERMINI DI MULTIPOLO.

Esprimeremo la sezione d'urto differenziale tramite gli elementi di matrice T_α per la diffusione nello stato α nel modo seguente (*):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2 \left\langle \left| \sum_{\alpha} T_{\alpha} \right|^2 \right\rangle_{\mathbf{e}, \mathbf{e}', \sigma} \quad (1)$$

dove T_α è esprimibile nella forma $a_\alpha(k) f_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{e}, \mathbf{e}', \sigma)$ cioè come prodotto di una funzione complessa a_α dell'energia k del fotone per una funzione scalare f_α dei vettori unitari $\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{e}, \mathbf{e}'$, e σ , i quali rappresentano il momento iniziale e finale del fotone, la polarizzazione iniziale e finale e lo spin del protone. Le parentesi indicano una media sugli stati di spin e di polarizzazione; il fattore due è presente perché vogliamo una somma sugli stati finali di polarizzazione invece di una media. L'equazione (1) può essere riscritta in termini di a_α e f_α :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \sum_{\alpha} \left| a_{\alpha} \right|^2 \left\langle 2 \left| f_{\alpha} \right|^2 \right\rangle_{\mathbf{e}, \mathbf{e}', \sigma} + \sum_{\alpha < \beta} \operatorname{Re} a_{\alpha} a_{\beta}^* \left\langle 4 \operatorname{Re} f_{\alpha} f_{\beta}^* \right\rangle_{\mathbf{e}, \mathbf{e}', \sigma} \\ &= \sum_{\alpha \leq \beta} \operatorname{Re} a_{\alpha}(k) a_{\beta}^*(k) M_{\alpha\beta}(x), \end{aligned} \quad (2)$$

dove $x = \cos \Theta$ e

$$\begin{aligned} M_{\alpha\alpha}(x) &= \left\langle 2 \left| f_{\alpha} \right|^2 \right\rangle_{\mathbf{e}, \mathbf{e}', \sigma}, \\ M_{\alpha\beta}(x) &= \left\langle 4 \operatorname{Re} f_{\alpha} f_{\beta}^* \right\rangle_{\mathbf{e}, \mathbf{e}', \sigma}, \end{aligned} \quad (3)$$

L'equazione (2) ci dà allora la sezione d'urto differenziale come una somma di termini, ciascuno dei quali rappresenta l'interferenza di due stati α e β , e consiste del prodotto di un fattore che dipende dall'energia per una funzione del solo angolo.

I fattori angolari $M_{\alpha\beta}(x)$ possono essere determinati o mediante somme delle autofunzioni del momento angolare secondo le regole della meccanica quantistica (facendo uso dei coefficienti di Clebsch-Gordon) o

(*) Tutti i parametri di questo paragrafo si riferiscono al sistema del centro di massa.

con un metodo equivalente che fa uso di combinazioni invarianti dei vettori $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}'$, e σ ⁽⁸⁾. Entrambi questi metodi sono basati soltanto sui principi fondamentali di conservazione e d'invarianza e non fanno alcuna ipotesi sul meccanismo del processo considerato, tranne che sulla scelta degli stati di momento angolare (cioè, multipoli) che danno un contributo. Determineremo $M_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ col metodo dei vettori.

Per ragioni di simmetria ⁽⁸⁾ si può dimostrare che le f_{α} , cioè quelle parti dell'ampiezza che dipendono solo dall'angolo, hanno queste espressioni per le varie transizioni di dipolo:

$$\begin{aligned} f_{E1} &= \mathbf{e}' \times \mathbf{e} \\ f_{E1}^* &= i \sigma \times \mathbf{e}' \wedge \mathbf{e} \\ f_{M1} &= \mathbf{s}' \times \mathbf{s} \\ f_{M1}^* &= i \sigma \times \mathbf{s}' \wedge \mathbf{s} \end{aligned} \quad (4)$$

dove l'asterisco indica l'ampiezza di « spin-flip » e $\mathbf{s} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{e}$ (si noti che $\mathbf{k} \times \mathbf{e} = 0$ per fotoni). Ci sarà anche utile servirci della seguente espressione dell'ampiezza, che è una sovrapposizione di multipoli:

$$f_L = i \sigma \times (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \times (\mathbf{e} \wedge \mathbf{e}'). \quad (5)$$

Prima di valutare $M_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ esprimiamo i nostri vettori in termini di un sistema di coordinate solidale con il centro di massa. Sia $\mathbf{k} = \mathbf{z}$, $\mathbf{e} = \mathbf{x}$, ed $\mathbf{s} = \mathbf{k} \times \mathbf{e} = \mathbf{y}$. Per la diffusione sotto un angolo polare Θ relativo all'asse z ed un angolo azimutale Φ rispetto all'asse x , si può facilmente dimostrare che:

$$\mathbf{k}' = \sin \Theta \cos \Phi \mathbf{x} + \sin \Theta \sin \Phi \mathbf{y} + \cos \Theta \mathbf{z}.$$

Rappresentando la direzione di polarizzazione finale mediante l'angolo α relativo al piano di diffusione (direzione positiva allontanandosi dall'asse z) si ottiene (*):

$$\mathbf{e}' = \begin{pmatrix} \cos \Theta \cos \Phi \cos \alpha - \sin \Phi \sin \alpha \\ \cos \Theta \sin \Phi \cos \alpha + \cos \Phi \sin \alpha \\ - \sin \Theta \cos \alpha \end{pmatrix}$$

(*) Questo non è difficile se si esprime $\mathbf{e}'$ in un sistema di riferimento orientato lungo $\mathbf{k}'$ e lungo l'asse $\alpha = 0$ e poi lo si trasforma, attraverso un prodotto di matrici, nel sistema xyz .

$$\mathbf{s}' = \mathbf{k}' \wedge \mathbf{e}' = \begin{pmatrix} -\cos \Theta \sin \Phi \sin \alpha + \cos \Phi \cos \alpha \\ -\cos \Theta \cos \Phi \sin \alpha - \sin \Phi \cos \alpha \\ \sin \Theta \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Il calcolo dei fattori $M_{\alpha\beta}$ che corrispondono agli f_{α} elencati nelle equazioni (4) e (5) è ora semplicemente una questione di algebra vettoriale. Possiamo dare un esempio calcolandone uno:

$$\begin{aligned} M_{E1}^* M1^* &= 4 \left\langle \text{Re } f_{E1}^* f_{M1}^* \right\rangle_{\mathbf{e}, \mathbf{e}', \vec{\sigma}} = \\ &= 4 \left\langle \text{Re} \left\{ \left[i \vec{\sigma} \times \mathbf{e}' \wedge \mathbf{e} \right] \left[-i \vec{\sigma} \times \mathbf{s}' \wedge \mathbf{s} \right] \right\} \right\rangle_{\mathbf{e}, \mathbf{e}', \vec{\sigma}} = \\ &= 4 \left\langle \text{Re} \left\{ \vec{\sigma} \times \left[-\sin \Theta \cos \alpha \mathbf{y} - \left(\cos \Theta \sin \Phi \cos \alpha + \cos \Phi \sin \alpha \right) \mathbf{z} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \vec{\sigma} \left[-\sin \Theta \sin \alpha \mathbf{x} - \left(\sin \Phi \cos \alpha + \cos \Theta \cos \Phi \sin \alpha \right) \mathbf{z} \right] \right\} \right\rangle_{\Phi, \alpha, \vec{\sigma}} = \\ &= 4 \left\langle \left(\cos \Theta \sin \Phi \cos \alpha + \cos \Phi \sin \alpha \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\sin \Phi \cos \alpha + \cos \Theta \cos \Phi \sin \alpha \right) \right\rangle_{\Phi, \alpha}. \end{aligned}$$

Abbiamo tenuto conto della identità $(\sigma \times \mathbf{a})(\sigma \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + i\sigma(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ e del fatto che $\langle \sigma \rangle = 0$. Facendo la media su Φ e α , otteniamo

$$M_{E1}^* M1^* = 2 \cos \Theta = 2x.$$

Nella tabella seguente sono elencati i fattori $M_{\alpha\beta}$ corrispondenti a tutte le coppie di stati $E1$, $E1^*$, $M1$, $M1^*$, e L .

$\alpha = \beta =$	$E1$	$E1^*$	$M1$	$M1^*$	L
$E1$	$\frac{1}{2}(1+x^2)$	0	$2x$	0	0
$E1^*$		$\frac{1}{2}(3-x^2)$	0	$2x$	$-2(1-x)^2$
$M1$			$\frac{1}{2}(1+x^2)$	0	0
$M1^*$				$\frac{1}{2}(3-x^2)$	$2(1-x)^2$
L					$2(1-x)^3$

Dalla tabella si può vedere che se la diffusione ha luogo completamente attraverso il canale di dipolo elettrico « non-spin-flip » E1, allora la sezione d'urto differenziale sarà proporzionale a $\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \Theta)$, il che effettivamente accade per energie prossime a zero. Un contributo di dipolo magnetico, per esempio, aggiunge un termine proporzionale a $2 \cos \Theta$, e così via.

CONTRIBUTI DOVUTI ALLA DIFFUSIONE THOMPSON ED AL MOMENTO MAGNETICO.

Ammetteremo, nel nostro modello della diffusione fotone-protone al disotto di 1 GeV che 5 siano i processi di cui occorra tener conto: 1) la diffusione elettromagnetica diretta, che suddivideremo, per convenienza, in diffusione dovuta alla carica elettrica (cioè Thompson) e diffusione dovuta al momento magnetico di Dirac, denotate con T e M rispettivamente; 2) la diffusione di dipolo elettrico $J = \frac{1}{2}$ tramite la corrente virtuale di mesoni carichi, denotata con E; 3) la diffusione associata alla risonanza pione-nucleone $T = \frac{3}{2}$, $J = \frac{3}{2}$, denotata con 33; 4) la diffusione associata alla seconda risonanza pione-nucleone $T = \frac{1}{2}$, $J = \frac{3}{2}$, denotata con 13; e 5) la diffusione dovuta al cosiddetto diagramma di Low ⁽⁹⁾ nel quale il fotone e il protone scambiano un π^0 che si accoppia al fotone per mezzo dell'interazione di decadimento $\pi^0 \rightarrow 2 \gamma$.

La formula della diffusione Thompson può essere estesa al caso in questione, facendo uso di argomenti del tutto generali d'invarianza di gauge e relativistica ^(9, 10) tramite la seguente espressione per l'ampiezza (al primo ordine in k):

$$T_{Th} = \frac{e^2}{M} \mathbf{e}' \times \mathbf{e} - 2i\mu_p^2 k \sigma \times \mathbf{s}' \wedge \mathbf{s} - \frac{ie\mu_p}{2M} k \left[\sigma \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{s} \times \mathbf{e}' + \sigma \times \mathbf{s} \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{e}' - \right. \\ \left. \sigma \times \mathbf{k}' \cdot \mathbf{s}' \times \mathbf{e} - \sigma \times \mathbf{s}' \cdot \mathbf{k}' \times \mathbf{e} \right] - \frac{ie\mu_{anom}}{M} k \sigma \times \mathbf{e} \wedge \mathbf{e}'$$

(coordinate del centro di masse, $\hbar = c = 1$, $e^2 = 1/137$)

Il primo termine è la diffusione classica Thompson; il secondo è una transizione di dipolo magnetico che corrisponde classicamente ad una precessione di μ_p intorno a $\mu_p \mathbf{H}$, mentre gli ultimi due sono piccoli

termini di rinculo in $1/M$. Oltre a tralasciare i termini di rinculo, faremo altre due modifiche. Moltiplichiamo il termine Thompson per k^*/k , rapporto fra l'energia del fotone nel centro di massa e nel laboratorio, per tener conto della dipendenza da k d'ordine più elevato [vedere, ad esempio, POWELL ⁽¹¹⁾]; e sostituiamo il momento magnetico totale del protone μ_p col momento di Dirac $e/2M$, poiché nel nostro modello il momento anomalo è interpretato come un effetto della nuvola di pioni che è trattato separatamente. Avremo allora

$$a_T = - \frac{e^2}{M} \frac{k^*}{k} = - .153 \frac{k^*}{k} \times 10^{-15} \text{ cm}$$

$$a_M = - \frac{1}{2} \frac{e^2}{M} \frac{k^*}{k} = - .0767 \frac{k^*}{k} 10^{-15} \text{ cm}$$

$$f_T = \mathbf{e}' \times \mathbf{e} = f_{E1}$$

$$f_M = \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{s}' \wedge \mathbf{s} = f_{M1}.$$

CONTRIBUTO DELLA RISONANZA 33.

Seguendo AUSTERN ⁽¹⁾ e FELD ⁽³⁾ interpretiamo la diffusione attraverso lo stato intermedio $T = \frac{3}{2}$, $J = \frac{3}{2} +$ in termini di un semplice modello isobarico. La sezione d'urto totale $\sigma_{\gamma\gamma}$ di diffusione risonante è proprio la sezione d'urto per produrre l'isobaro moltiplicata per la larghezza del canale relativo al decadimento dell'isobaro nel sistema $\pi + \text{nucleone}$:

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \sigma_{\gamma}^* \frac{\Gamma_{\gamma}}{\Gamma}$$

Poiché il decadimento nel sistema $\pi^+ \text{ nucleone}$ tiene virtualmente conto di tutti i decadimenti dell'isobaro possiamo sostituire σ_{γ}^* con $\sigma_{\gamma\pi}$ e $\frac{\Gamma_{\gamma}}{\Gamma}$ con $\frac{\sigma_{\pi\gamma}}{\sigma_{\pi\pi}}$, rapporto delle sezioni d'urto per la reazione $\pi + N \rightarrow N + \gamma$ e la diffusione π -nucleone. Si può infine sostituire $\sigma_{\pi\gamma}$ con $\sigma_{\gamma\pi}$, sezione d'urto per il processo inverso, facendo uso del principio del bilancio dettagliato:

$$\sigma_{\gamma\pi} / (\text{spazio delle fasi}) = \sigma_{\pi\gamma} / (\text{spazio delle fasi})$$

ovvero

$$\sigma_{\gamma\pi}/p^{*2} = \sigma_{\pi\gamma}/2k^{*2},$$

dove q^* è il momento del pione nel centro di massa e il fattore due rappresenta i due stati di polarizzazione del fotone. Abbiamo così

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \frac{2k^{*2}}{q^{*2}} \frac{\sigma_{\gamma\pi}^2}{\sigma_{\pi\pi}} \quad (6)$$

Poichè $\left| \pi^0 p \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| T = \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| T = \frac{3}{2} \right\rangle$, possiamo uguagliare $\sigma_{\gamma\pi}$ sezione d'urto, per fotoproduzione nello stato $T = \frac{3}{2}$ a $\frac{3}{2} \sigma_{\gamma\pi^0}$ laddove domina tale risonanza; e poichè $\left| \pi^+ p \right\rangle$ è uno stato $T = \frac{3}{2}$ puro, possiamo usare $\sigma_{\pi^+\pi^+}$ al posto di $\sigma_{\pi\pi}$. Cioè,

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{33} = \frac{9}{2} \frac{k^{*2}}{q^{*2}} \frac{\sigma_{\gamma\pi^0}^2}{\sigma_{\pi^+\pi^+}}, \quad (7)$$

dove ciascuna delle sezioni d'urto deve essere interpretata come solamente il contributo dalla risonanza 33.

Lo stato fotone-più-protone di momento angolare totale a parità $J = \frac{3}{2} +$ è una sovrapposizione di ampiezze « spin-flip » e « non-spin-flip ». In particolare, la parte angolare dell'ampiezza di dipolo magnetico $J = \frac{3}{2}$ è data da

$$f_{33} = f_{M1} - \frac{1}{2} f_{M1^*} = \mathbf{s}' \times \mathbf{s} - \frac{1}{2} i \sigma \times \mathbf{s}' \wedge \mathbf{s},$$

come si può verificare usando operatori di proiezione ⁽⁸⁾.

Utilizzando i termini $M_{\alpha\beta}(x)$ tabulati precedentemente si ottiene $M_{33} -_{33}(x) = \frac{1}{8} (7 + 3x^2)$. La sezione d'urto totale per diffusione risonante è allora

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\gamma}^{33} &= \int' \frac{d\sigma}{d\Omega^*} 2\pi d\cos\Theta \\ &= \int' \left| a_{33} \right|^2 M_{33-33}(x) 2\pi dx \\ &= 4\pi \left| a_{33} \right|^2 \end{aligned}$$

da cui

$$|a_{33}(k)| = \sqrt{\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{33}}{4\pi}},$$

dove $\sigma_{\gamma\gamma}^{33}$ è data dall'equazione (7). La fase per la diffusione risonante del fotone è la stessa della corrispondente diffusione del pione; cioè

$$a_{33}(k) = \sqrt{\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{33}}{4\pi}} e^{i\delta_{33}(k)} \quad (8)$$

Per il calcolo numerico il rapporto $\sigma_{\gamma\pi^0}/\sigma_{\pi^+\pi^+}$ è sostituito dal suo valore sperimentale al picco della risonanza 33, 0,29 mb/210mb, per cui si ottiene

$$a_{33}(k) = 0.0222 \frac{k^*}{q^*} \sqrt{\sigma_{\gamma\pi^0}(k)} e^{i\delta_{33}(k)}$$

La sezione d'urto $\sigma_{\gamma\pi^0}(k)$ e la fase $\delta_{33}(k)$ sono dedotte dai dati sperimentali riportati nei riferimenti bibliografici 12 e 13.

CONTRIBUTO DELLA RISONANZA 13

La seconda risonanza pione-nucleone ($T = \frac{1}{2}, J = \frac{3}{2}$) può essere trattata quasi allo stesso modo. Interpretando ora l'equazione (6) come relativa alla risonanza $T = \frac{1}{2}$, sostituiamo $3\sigma_{\gamma\pi^0}$ a $\sigma_{\gamma\pi}$ e $\frac{3}{2}\sigma_{\pi^+\pi^+}$ a $\sigma_{\pi\pi}$. L'equazione (7) diviene allora

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{13} = 12 \frac{k^{*2}}{k^{*2}} \frac{\sigma_{\gamma\pi^0}^2}{\sigma_{\pi^+\pi^+}} \quad (9)$$

in essa ciascuna delle sezioni d'urto rappresenta solamente il contributo della risonanza 13. Tuttavia, la questione non è così semplice. L'isobaro 13 può anche decadere con emissione di due pioni, e giudicando dalle sezioni d'urto ⁽¹⁴⁾ di fotoproduzione, questo avviene nel 50% circa

dei casi. Perciò Γ_γ/Γ diventa circa $\frac{1}{2} \frac{\sigma_{\pi\gamma}}{\sigma_{\pi\pi}}$, e $\sigma_{\gamma^*} \sim 2\sigma_{\gamma\pi}$. Si noti, tuttavia che l'effetto è nullo al primo ordine e che perciò l'equazione (9) è ancora approssimativamente corretta. Le incertezze nei dati della foto-

produzione in questa regione di energia non giustificano una trattazione più rigorosa di questa.

Lo stato $J = \frac{3}{2}$ — è dato in termini dei nostri stati di multipolo da

$$f_{13} = f_{E1} - \frac{1}{2} f_{E1}^* = \mathbf{e}' \times \mathbf{e} - \frac{1}{2} i \sigma \times \mathbf{e}' \wedge \mathbf{e}$$

Di qui si ricava $M_{13-13}(x) = \frac{1}{8} (7 + 3x^2)$, cioè la stessa distribuzione angolare che nel caso della risonanza 33. Così:

$$|a_{13}(k)| = \sqrt{\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{13}}{4\pi}},$$

dove $\sigma_{\gamma\gamma}^{13}$ è dato dall'equazione (9). Otteniamo allora:

$$a_{13}(k) = \sqrt{\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{13}}{4\pi}} e^{i\delta_{13}}$$

Sostituendo dei valori ragionevoli per il contributo $\sigma_{\gamma\pi^0}$ ⁽¹⁹⁾ e $\sigma_{\pi-\pi}$ ⁽¹⁸⁾ alla risonanza si ottiene

$$a_{13}(k) = .0316 \frac{k^*}{q^*} \sqrt{\sigma_{\gamma\gamma\pi^0}^{13}(k)} e^{i\delta_{13}(k)}$$

Per $\sigma_{\gamma\pi^0}$ usiamo una formula del tipo di Breit-Wigner per i dati sulla fotoproduzione ⁽¹²⁾ (dopo aver sottratto il contributo estrapolato della risonanza 33), prendendo come energia dei fotoni alla risonanza (sistema di laboratorio) il valore di 750 MeV ed una larghezza Γ di 96 MeV nel sistema centro di massa. La corrispondente fase $\delta_{13}(k)$ è data da

$$\tan \delta_{13} = \frac{\Gamma}{2(E_{\text{res}}^* - E^*)}$$

La richiesta che la parte immaginaria dell'ampiezza in avanti sia data da $\frac{k^*}{4\pi} \sigma_{\text{tot}}$ fa sì che δ_{13} sia compreso tra 0° e 180° .

E' molto probabile che la formula per unico livello risonante non dia un'accurata descrizione dell'ampiezza 13 e della fase, ma in assenza di qualsiasi dato sperimentale o teorico è forse il meglio che si possa scrivere.

CONTRIBUTO DELLA VITA MEDIA DEL π^0 .

Un immediato calcolo dell'ampiezza per il diagramma di Low (fotone e protone si scambiano un pione neutro) dà ^(15, 16).

$$T_L = - \frac{e^2}{M} \frac{g}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{\mu \tau}} \frac{k^*}{E^*} \frac{M}{\mu} \frac{1}{(k^* - k'^*)^2 + \mu^2} i \sigma \times (k - k') (k - k') \times (e \wedge e'),$$

dove $g^2 = 14,2$, E^* è l'energia totale nel sistema del centro di massa, e τ è la vita del π^0 . Si assume un fattore di forma unitario al vertice $\pi^0_{\gamma\gamma}$. Nelle nostre notazioni allora avremo

$$T_L = \frac{a(k)}{x - x_p(k)} f_L$$

dove f_L è dato dall'equazione (5),

$$x_p(k) = 1 + \frac{\mu^2}{2 k^{*2}},$$

$$e a_L = - \frac{e^2}{M} \frac{g}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{\mu \tau}} \frac{k^*}{E^*} \frac{M}{\mu} = - \cdot 115 \frac{k^*}{E^*} 10^{-15} \text{ cm}$$

(assumendo $\tau = 2 \cdot 10^{-16}$ sec).

La scelta della vita media del π^0 è basata sulle esperienze di GLASSER e al. ⁽¹⁷⁾ con emulsioni. Per semplicità, nei calcoli sulla distribuzione angolare abbiamo separato il polo al denominatore $x - x_p$ dalla funzione angolare f_L .

CONTRIBUTO DELLA CORRENTE DEL π^+ .

A basse energie il processo nel quale il fotone viene diffuso elettromagneticamente dal pione virtuale carico ha luogo attraverso lo stato di momento angolare totale $J = \frac{1}{2}$ e parità $-$, così come avviene per la corrispondente fotoproduzione diretta del π^+ . Questo stato è una combinazione dei dipoli elettrici « spin-flip » e « non-spin-flip » data da

$$f_E = \frac{1}{2} f_{E1} + \frac{1}{2} f_{E1^*} = \frac{1}{2} (e' \times e + i \sigma \times e' \wedge e).$$

La dipendenza dell'energia di $a_E(k)$ è stata spesso calcolata tramite teorie perturbative, con buoni risultati, relativamente alla fotoproduzione e alla diffusione di fotoni ⁽⁴⁾ a bassa energia, ma non ci si può attendere che questo sia possibile ad energie più elevate come nel nostro caso. Altri autori si sono serviti delle relazioni di dispersione per derivarne le ampiezze di alcuni insiemi di stati alquanto diversi che includono lo stato $J = \frac{3}{2} -$ ^(15, 18). Questo rende l'analisi fenomenologica ad alte energie dove predomina la seconda risonanza ($J = \frac{3}{2} -$) alquanto incerta proprio là dove la valutazione degli integrali di dispersione diviene meno sicura. Questa complicazione si ha soltanto nella valutazione della parte reale di a_E ; la parte immaginaria invece è data semplicemente in termini dell'assorbimento totale (cioè di fotoproduzione) in questo stato ⁽¹⁸⁾ (*):

$$\text{Im } a_E = 2k^* |E_1|^2,$$

dove E_1 è l'ampiezza di fotoproduzione di dipolo elettrico $J = \frac{1}{2} -$ come definita da WATSON. Assumendo che la parte dell'ampiezza di fotoproduzione che non dipende dallo spin isotopico tra la soglia e 500 MeV sia completamente determinata dall'ampiezza E_1 , possiamo servirci dei dati sperimentali per valutare E_1 :

$$|E_1|^2 = \frac{d\sigma_{\gamma\pi^*}}{d\Omega^*}(90^\circ) - \frac{1}{2} \frac{d\sigma_{\gamma\pi^0}}{d\Omega^*}(90^\circ).$$

Abbiamo valutato la parte reale dell'ampiezza a_E in vicinanza della soglia di fotoproduzione di pioni, confrontando la sezione d'urto differenziale a 0° calcolata con il presente modello, ponendo $\text{Re } a_E = 0$, con quel che può dedurre dalla relazione di dispersione

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(0^\circ) = \left| -\frac{e^2}{M} + \frac{k^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sigma(k') dk'}{k'^2 - k^2} - \frac{\mu_{\text{anom}}}{2} \frac{k}{M} \frac{e^2}{M} + i \frac{k}{4\pi} \sigma_{\text{tot}} \right|^2 \quad (*)$$

(*) Nel riferimento bibliografico ⁽¹⁸⁾ il fattore due è assorbito nella definizione del loro fattore corrispondente al nostro f_E .

(*) In realtà questa relazione è soltanto approssimata. Abbiamo infatti trascurato il termine che comprende l'integrale della differenza tra la sezione d'urto totale per fotoni a polarizzazione circolare parallela e antiparallela allo spin del protone. Il contributo dovuto alla vita media dei π^0 è identicamente nullo in avanti, e perciò non si introduce nessun errore per effetto dell'incertezza con cui è nota.

e facendo uso della differenza per ricavare $\text{Re } a_E$. L'andamento che si ottiene per l'ampiezza è qualitativamente in accordo con precedenti valutazioni e presenta la cuspidè che ci si deve aspettare in corrispondenza della soglia per i mesoni. Ad energie più elevate i termini di ritardo trascurati daranno un contributo significativo alla sezione d'urto in avanti, ed ogni calcolo di questo tipo di $\text{Re } a_E$ avrà scarso significato. In conseguenza di ciò, abbiamo posto $\text{Re } a_E = 0$ oltre i 350 MeV. Questo dev'essere tenuto presente nell'assegnare l'attendibilità delle previsioni del modello ad alte energie.

E' pure possibile che la brusca salita della sezione d'urto per fotoproduzione doppia di mesoni carichi intorno a 500 MeV sia dovuta ad una interazione diretta dei fotoni e della corrente di mesoni, associata ad un intenso effetto di dipolo elettrico $J = \frac{1}{2}$ —, analogo a quello che avviene alla soglia per fotoproduzione singola.

In tal caso, sono anche errate le nostre congetture sulla dipendenza di $\text{Im } a_E$ dall'energia.

RISULTATI

I fattori che dipendono dall'angolo per le diverse ampiezze che contribuiscono alla diffusione dei fotoni sono elencati qui di seguito in termini delle funzioni definite dalle equazioni (4) e (5):

$$f_T = f_{E1}$$

$$f_M = f_{M1*}$$

$$f_E = \frac{1}{2} f_{E1} + \frac{1}{2} f_{E1*}$$

$$f_{33} = f_{M1} - \frac{1}{2} f_{M1*} \quad (11)$$

$$f_{13} = f_{E1} - \frac{1}{2} f_{E1*}$$

$$f_L = f_L$$

Dalla tabella della distribuzione angolare $M_{\alpha\beta}$ già calcolata per le ampiezze (4) e (5) si può costruire una tabella analoga che si riferisce alle ampiezze (11):

$\beta = \alpha =$	T	M	E	33	13	L
T	$\frac{1}{2}(1+x^2)$	O	$\frac{1}{2}(1+x^2)$	$2x$	$1+x^2$	O
M		$\frac{1}{2}(3-x^2)$	x	$-\frac{1}{2}(3-x^2)$	$-x$	$2(1-x)^2$
E			$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}x$	$-\frac{1}{4}(1-3x^2)$	$-(1-x)^2$
33				$\frac{1}{8}(7+3x^2)$	$\frac{5}{2}x$	$-(1-x)^2$
13					$\frac{1}{8}(7+3x^2)$	$-(1-x)^2$
L						$2(1-x)^3$

Questi fattori, insieme con le ampiezze esaminate nei paragrafi precedenti vengono allora introdotti nell'equazione (2) per ricavarne la sezione d'urto differenziale. In particolare, a 0° ($x = 1$) abbiamo

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega^*} = & a_T^2 + a_M^2 + \frac{1}{2}|a_E|^2 + \frac{5}{4}|a_{33}|^2 + \frac{5}{4}|a_{13}|^2 + a_T \operatorname{Re} a_E + \\
 & + 2a_T|a_{33}|\cos\delta_{33} + 2a_T|a_{13}|\cos\delta_{13} + a_M \operatorname{Re} a_E - a_M|a_{33}|\cos\delta_{33} - \\
 & - a_M|a_{13}|\cos\delta_{13} + \frac{1}{2}\operatorname{Re} a_E|a_{33}|\cos\delta_{33} + \frac{1}{2}\operatorname{Im} a_E|a_{33}|\sin\delta_{33} + \\
 & + \frac{1}{2}\operatorname{Re} a_E|a_{13}|\cos\delta_{13} + \frac{1}{2}\operatorname{Im} a_E|a_{13}|\sin\delta_{13} + \\
 & + \frac{5}{2}|a_{33}||a_{13}|\cos(\delta_{33} - \delta_{13}),
 \end{aligned}$$

e a 90° ($x = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega^*} = & \frac{1}{2} a_T^2 + \frac{3}{2} a_M^2 + \frac{1}{2} |a_E|^2 + \frac{7}{8} |a_{33}|^2 + \frac{7}{8} |a_{13}|^2 + \\ & + 2 \frac{a_L^2}{x_p^2} + \frac{1}{2} a_N \operatorname{Re} a_E + \\ & + a_T |a_{13}| \cos \delta_{13} - \frac{3}{2} a_M |a_{33}| \cos \delta_{33} - 2 a_M \frac{a_L}{x_p} - \frac{1}{4} \operatorname{Re} a_E |a_{13}| \cos \delta_{13} - \\ & - \frac{1}{4} \operatorname{Im} a_E |a_{13}| \sin \delta_{13} + \operatorname{Re} a_E \frac{a_L}{x_p} + |a_{33}| \frac{a_L}{x_p} \cos \delta_{33} - \\ & - |a_{13}| \frac{a_L}{x_p} \cos \delta_{13}. \end{aligned}$$

Questa ultima è graficata in Fig. 1. Ancora in Fig. 1 sono riportati i dati attualmente disponibili sulla sezione d'urto differenziale a 90° al di sopra della soglia mesonica.

Paragonando i nostri risultati con i dati, si possono fare varie osservazioni:

1) Nella regione di energia dei fotoni da 50 a 150 MeV la nostra curva a 90° (Fig. 1) si trova leggermente al di sotto dei punti sperimentali di Chicago, del MIT e di Mosca. Tuttavia, il lavoro teorico assai più elaborato in questo intervallo di energie di Lapidus e Chou è in miglior accordo con i dati. Il difetto probabilmente sta nel modo con cui abbiamo trattato il contributo della corrente del pione virtuale.

2) D'altro lato, nell'intervallo da 180 MeV a 280 MeV la nostra curva si trova un poco al di sopra dei dati di ILLINOIS ⁽¹⁶⁾. Questo fatto è anche caratteristico dei precedenti calcoli fenomenologici. Tuttavia ciò non avviene per il calcolo più rigoroso che fa uso delle relazioni di dispersione, dovuto a JACOBS e MATHEWS, anche se qui l'accordo è ottenuto soltanto per quel valore della vita media del π^0 (circa 10^{-17} sec.) che minimizza la sezione d'urto in questa regione dell'energia. Si noti che, servendosi per la vita media del valore misurato mediante emulsioni, i risultati della loro teoria divengono cattivi quanto i nostri. La ragione di questa discrepanza non è chiara. HYMAN e al. dichiarano di aver ottenuto un buon accordo tenendo conto in questa regione del taglio a bassa energia della seconda risonanza. Il loro accordo a 90° è probabilmente casuale, poiché il loro modello non funziona ad altri angoli ed è stato trascurato il contributo importante della corrente pionica. Probabilmente vi è un

errore nel trattamento della risonanza 33 o nel calcolo del contributo della corrente pionica, comune a tutte le teorie, eventualmente (ma non sicuramente) ad eccezione dei calcoli di Jacobs e Mathews basati sulle relazioni di dispersione. Conseguentemente, una stima della vita media del

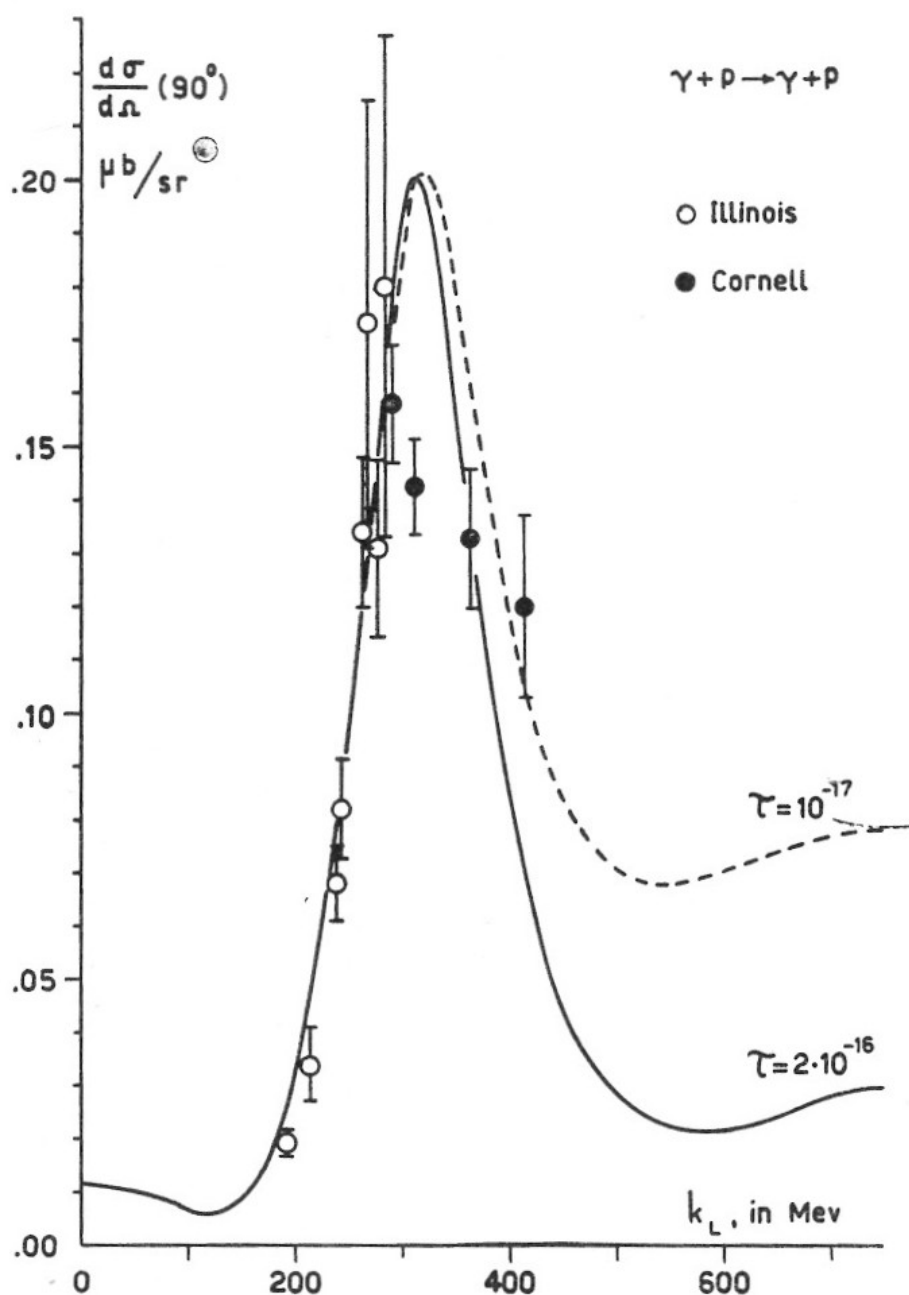


Fig. 1. - Sezione d'urto differenziale nel S.C.M. a 90° , in funzione dell'energia del fotone nel laboratorio. Calcolata con il modello fenomenologico. Dati sperimentali dai riferimenti bibliografici 19, 10 e 11.

π^0 basata sui dati in questa regione d'energia è probabilmente prematura. L'entità dell'effetto della vita media sulla sezione d'urto è dello stesso ordine dell'apparente incertezza nella teoria.

3) In contrasto alle discordanze piuttosto piccole (due deviazioni standard) sotto 280 MeV, il disaccordo nella regione da 300 a 380 MeV

è notevolissimo. La nostra sezione d'urto calcolata a 90° a 310 MeV, circa. $21 \mu\text{b}/\text{sr}$, deve essere paragonata con il valore sperimentale di CORNELL ⁽⁶⁾, $14 \mu\text{b}/\text{sr}$. Il disaccordo ad energie più basse può essere facilmente spiegato con l'imprecisione del nostro modello piuttosto semplice,

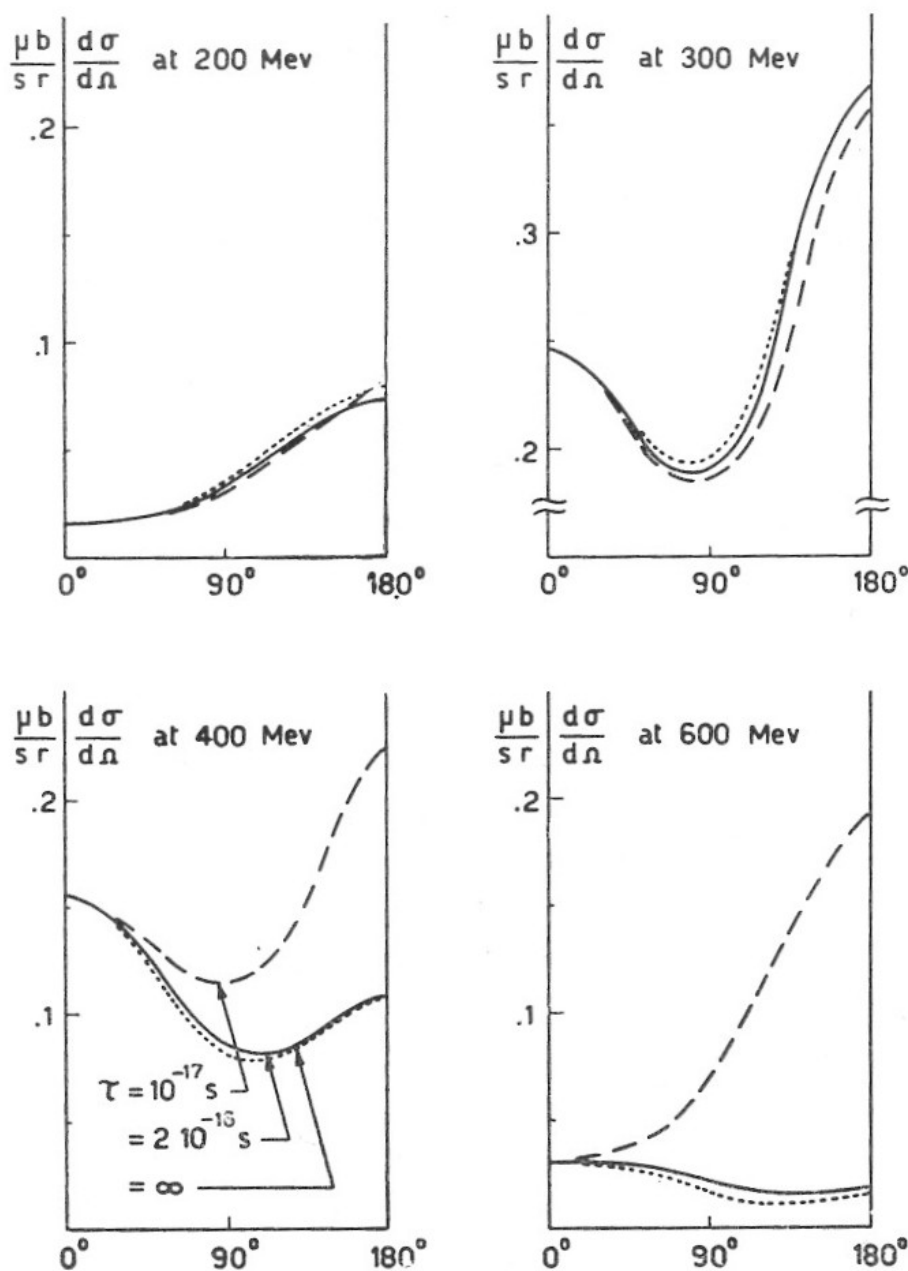


Fig. 2. - Sezione d'urto differenziale nel S.C.M. in funzione dell'angolo graficata per quattro valori dell'energia dei fotoni nel S.L. e tre valori della vita media del π^0 . Calcolate mediante il modello fenomenologico. Dati sperimentali dai riferimenti bibliografici 9 e 11.

ma un disaccordo così serio al picco della risonanza è davvero sorprendente. Il fatto che i calcoli basati sulla teoria della dispersione, e quelli fenomenologici della sezione d'urto a 0° concordino perfettamente rende il fenomeno ancor più sconcertante. Il solo effetto che si ottiene cambiando la vita media del π^0 è il rendere l'accordo leggermente peggiore.

4) Nella regione dominata dalla seconda risonanza pione-nucleone abbiamo soltanto dati preliminari ^(6, 7). Da notare che a questa energia l'effetto Low è diventato abbastanza apprezzabile, specialmente ad angoli all'indietro, e perciò una determinazione della vita media del π^0 diviene più facile. Va, tuttavia, ricordato che per molteplici ragioni si può far poco affidamento sul nostro modello ad alte energie. Comunque, se si prendono i nostri calcoli per buoni, i dati sembrano indicare per il π^0 una vita media di circa 10^{-17} sec. di un fattore venti più breve di quella ottenuta con misura diretta da GLASSER in lastre ⁽¹⁷⁾. Può essere interessante notare che questo è lo stesso valore che, in accordo con JACOBS e MATHEWS, meglio si addice ai dati intorno a 200 MeV. E' chiaro che una misura di $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ad alte energie ad un angolo all'indietro sarebbe definitiva.

L'autore è grato al Prof. Marc Ross per le utili critiche e suggerimenti. Egli desidera anche ringraziare il Prof. Giorgio Cortellessa, il Dr. Armando Reale, il Dr. Paolo Salvadori e il Prof. John De Wire per avergli dato informazioni sui loro risultati sperimentali prima che fossero stati pubblicati e il Prof. Mario Ageno e l'Istituto Superiore di Sanità per la cordiale ospitalità.

Si ringrazia, infine, la National Science Foundation per una borsa di studio.

Roma — Istituto Superiore di Sanità - Laboratori di Fisica.

BIBLIOGRAFIA

- ⁽¹⁾ AUSTERN N. - Phys. Rev., 100: 1522 (1955).
- ⁽²⁾ YAMAGUCHI Y. - (non pubblicato): citato da T. Yamagata in Ph. D. Thesis, University of Illinois (1956).
- ⁽³⁾ FELD B. T. - Ann. Physics, T, 189 (1958).
- ⁽⁴⁾ KARZAS W. J., WATSON W. K. R. e ZACHARIASEN F. - Phys. Rev., 110: 253 (1958).
- ⁽⁵⁾ HYMAN L. G., ELY R., FRISCH D. H. e WAHLIG M. A. - Phys. Rev. Letters, 3: 93 (1959).
- ⁽⁶⁾ DEWIRE J. W., FELDMAN M., HIGHLAND V. L. e LITTAUER R. - (in corso di stampa).
- ⁽⁷⁾ CORTELLESA G., REALE A. e SALVADORI P. - (in corso di stampa).
- ⁽⁸⁾ MORAVSÍK M. J. - Internal report BNL 459, 1957 (non pubblicato).
- ⁽⁹⁾ LOW F. E. - Phys. Rev., 96: 1428 (1954); Proc. CERN Conf., p. 98 (1958).
- ⁽¹⁰⁾ GELLMANN M., GOLDBERGER M. L. e THIRRING W. E. - Phys. Rev., 95: 1612 (1954).
- ⁽¹¹⁾ POWELL J. L. - Phys. Rev., 74: 1258 (1948); Phys. Rev., 75: 32 (1949).
- ⁽¹²⁾ BERKELMAN K. e WAGGONER J. A. - Phys. Rev., 117: 1364 (1960).
- ⁽¹³⁾ DIETZ K. e HÖHLER G. - Z. Naturforsch., 14a: 994 (1959).
- ⁽¹⁴⁾ CHASAN B. M., COCCONI G., COCCONI V. T., SCHECTMAN R. M. e WHITE D. H. - Phys. Rev., 119: 811 (1960).
- ⁽¹⁵⁾ JACOB M. e MATHEWS J. - Phys. Rev., 117: 854 (1960).
- ⁽¹⁶⁾ BERNARDINI G., HANSON A. O., ODIAN A. C., YAMAGATA T., AUERBACH L. B. e FILOSOFO I. - Nuovo Cimento, 18: 1203 (1960).
- ⁽¹⁷⁾ GLASSER R. G., SEEMAN N., STILLER B. - Bull. Am. Phys. Soc., 6: 39 (1961); e comm. priv.
- ⁽¹⁸⁾ LAPIDUS L. I. e CHOU KUANG-CHAO - Zhurn. Eksp. Theor. Fiz., 38: 201 (1960) [trans. Sov. Phys. JETP, 11: 147 (1960)].